Parciales Resueltos de Probabilidades y Estadística

Federico Yulita

Primer cuatrimestre, 2019.

Índice

Si querés ver el resto de mis apuntes los podés encontrar en mi blog.

1. Segundo Parcial Verano 2018

1.1. Ejercicio 1

1.1.1. Ítem a

$$X = X_{almuerzo} + X_{merienda}$$

$$E\left(X_{almuerzo}\right) = 0.7 \cdot 34 + 0.3 \cdot 54 = 40$$

$$E\left(X_{merienda}\right) = 0.8 \cdot 16 + 0.2 \cdot 36 = 20$$

$$\implies E\left(X\right) = 40 + 20 = 60$$

.

$$\begin{aligned} V\left(X\right) &= V\left(X_{almuerzo} + X_{merienda}\right) = V\left(X_{almuerzo}\right) + V\left(X_{merienda}\right) \\ &= E\left(X_{almuerzo}^2\right) - E^2\left(X_{almuerzo}\right) + E\left(X_{merienda}^2\right) - E^2\left(X_{merienda}\right) \\ &= 1684 - 1600 + 464 - 400 = 148 \end{aligned}$$

.

$$V\left(\bar{X}_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum X\right) = \frac{1}{n^2} \cdot nV\left(X\right) = \frac{148}{n}$$

.

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(55 \leqslant X_n \leqslant 65\right) &= \mathbb{P}\left(55-60 \leqslant \bar{X}_n - \mu \leqslant 65-60\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| \leqslant 5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| \geqslant 5\right) \\
&\geqslant 1 - \frac{V\left(\bar{X}_n\right)}{5^2} = 1 - \frac{148}{25n} \geqslant 0.9 \\
&\implies n \geqslant \frac{148}{25\left(1-0.9\right)} \\
&\implies n \geqslant 60
\end{aligned}
$$

1.1.2. Ítem b

$$V\left(\bar{X}_{50}\right) = \frac{148}{50} = 2.96$$

$$\mathbb{P}\left(n\bar{X}_{50} \geqslant 3200\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_{50} - \mu}{\sqrt{V\left(\bar{X}_{50}\right)}} \geqslant \frac{\frac{3200}{50} - 60}{\sqrt{2.96}}\right) \approx \mathbb{P}\left(z \geqslant 2.32\right) \approx 1 - 0.9898 = 0.01$$

1.1.3. Ítem c

$$\mathbb{P}\left(n\bar{X}_n \geqslant 3200\right) \geqslant 0.7$$

$$\implies \mathbb{P}\left(z \geqslant \frac{\frac{3200}{n} - 60}{\sqrt{\frac{148}{n}}} = \frac{3200 - 60n}{\sqrt{148n}}\right) \geqslant 0.7$$

$$\implies z_{0.3} \approx -0.53 \geqslant \frac{3200 - 60n}{\sqrt{148n}}$$

$$\implies 41.57n \geqslant 3200^2 - 2 \cdot 3200 \cdot 60n + 60^2 n^2$$

$$\implies n \geqslant 55$$

1.2. Ejercicio 2

1.2.1. Ítem a

$$X_d \sim \mathcal{P}\left(d\lambda\right)$$

X_d es la cantidad de artículos publicados en d días. Tomemos M_d como la cantidad de artículos de matemática publicados en d días. Entonces:

$$M_d \sim \mathcal{P}\left(d\frac{\lambda}{5}\right), \ \mathbb{P}\left(M_1 \geqslant 1\right) = 0.6321$$

$$\mathbb{P}\left(M_1 \geqslant 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_1 = 0\right)$$

$$\mathbb{P}\left(M_1 = 0\right) = \exp\left(-\frac{\lambda}{5}\right) \implies 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{5}\right) = 0.6321$$

$$\implies \lambda = 4.99$$

1.2.2. Ítem b

$$\mathbb{P}(M_2 = 2|X_2 = 5) = \frac{\mathbb{P}(M_2 = 2, X_2 = 5)}{\mathbb{P}(X_2 = 5)}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 5) \approx \frac{10^5}{5!}\exp(-10) \approx 0.038$$

Tomemos O_d como la cantidad de artículos que no son de matemática que publicados en d días. Entonces:

$$O_d \sim \mathcal{P}\left(d\frac{4\lambda}{5}\right)$$

$$\mathbb{P}(M_2 = 2, X_2 = 5) = \mathbb{P}(M_2 = 2)\,\mathbb{P}(O_2 = 3) \approx 0.008$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(M_2 = 2|X_2 = 5) = 0.2$$

1.2.3. Ítem c

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant 2|X_3 = 7) = 1 - \left(7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \left(\frac{2}{3}\right)^7\right) \leftarrow \textit{Binomial}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X_1 \geqslant 2|X_3 = 7) = 0.74$$

1.3. Ejercicio 3

1.3.1. Ítem a

$$X_i \sim f(x;\theta) = \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathbf{1}\{\theta+1,\infty\}(x)$$

$$E(X_i) = \int x f(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{3(y+\theta)}{y^4}\mathrm{d}y = \frac{3}{2} + \theta$$

$$\Longrightarrow \hat{\theta}_n = \bar{X}_n - \frac{3}{2}$$

Notemos:

$$E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta = E\left(\bar{X}_n\right) + \frac{3}{2} - \theta = E(X_i) + \frac{3}{2} - \theta = \frac{3}{2} + \theta + \frac{3}{2} - \theta = 3 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ No es insesgado.

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{X}_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \theta - \frac{3}{2} = \theta$$

$\Longrightarrow$ Es consistente.

1.3.2. Ítem b

$$\mathcal{L}(X;\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{3}{(X_i-\theta)^4} \iff \theta \geqslant \text{mín}(X_i) - 1$$

Como $\prod_{i=1}^n \frac{3}{(X_i-\theta)^4}$ es estrictamente decreciente en θ entonces el máximo valor de $\mathcal{L}$ es para $\hat{\theta}_n = \text{mín}(X_i) - 1$.

1.3.3. Ítem c

Quiero probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \epsilon\right) = 0\,\forall\epsilon > 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\text{mín}\left(X_i\right) - 1 - \theta\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\text{mín}\left(X_i\right) - (\theta+1)\right| > \epsilon\right)\\
\theta + 1 \leqslant \text{mín}\left(X_i\right) \rightarrow &= \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) - (\theta+1) > \epsilon\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) > \epsilon + \theta + 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) \leqslant \epsilon + \theta + 1\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_i \leqslant \epsilon + \theta + 1\,\forall i\right)\\
&= 1 - F^n\left(\epsilon + \theta + 1\right)
\end{aligned}$$

$$F(t) = \int_{\theta+1}^{t} \frac{3}{(x-\theta)^4}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{(t-\theta)^3} \implies F^n\left(\epsilon+\theta+1\right) = 1 - (1+\epsilon)^{-3n}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - 1 + (1+\epsilon)^{-3n} = 0$$

1.3.4. Ítem d

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) - \theta \leqslant t\right) &= \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) \leqslant \theta + t\right) = \mathbb{P}\left(X_i \leqslant \theta + t\,\forall i\right)\\
&= F^n\left(\theta + t\right) = \left(1 - \frac{1}{t^3}\right)^n
\end{aligned}$$

Tomo $Y = \text{mín}\left(X_i\right) - \theta$:

$$\implies F_Y(t) = \left(1 - \frac{1}{t^3}\right)^n \mathbf{1}\{1,\infty\}(t) \implies f_Y(x) = \frac{3n}{x^4}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{n-1} \mathbf{1}\{1,\infty\}(x)$$

Como la distribución de Y no depende del parámetro puedo usarla como función pivote. Tomo:

$$T(\theta, X) = \text{mín}\left(X_i\right) - \theta$$

$$\implies \mathbb{P}\left(a \leqslant T(\theta, X) \leqslant b\right) = \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) - b \leqslant \theta \leqslant \text{mín}\left(X_i\right) - a\right) = 0.95$$

Tomemos el intervalo de confianza centrado, es decir la probabilidad de que esté por debajo del intervalo o por encima es la misma. Entonces:

$$F_Y(a) = \left(1 - \frac{1}{a^3}\right)^n = 0.025 \implies a = \left(\frac{1}{1 - 0.025^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$F_Y(b) = \left(1 - \frac{1}{b^3}\right)^n = 0.975 \implies b = \left(\frac{1}{1 - 0.975^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\implies I = \left[\text{mín}\left(X_i\right) - \left(\frac{1}{1 - 0.975^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{mín}\left(X_i\right) - \left(\frac{1}{1 - 0.025^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

1.4. Ejercicio 4

1.4.1. Ítem a

Dado que el gráfico es lineal entonces espero que la distribución del pH sea mas o menos normal. Por lo tanto, la media y la mediana deberían ser mas o menos iguales.

1.4.2. Ítem b

(i)

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 5 \\ H_1: & \mu \neq 5 \end{cases}, \ \bar{X}_{15} = 5.29, \ \sigma = \sqrt{0.25}, \ \alpha = 0.05.$$

$$\mathbb{P}\left(-z_\alpha \leqslant z \leqslant z_\alpha | H_0\right) = 1 - 0.05 \iff z_\alpha \approx 1.96$$

$$z = \sqrt{15} \cdot \frac{5.29 - 5}{\sqrt{0.25}} \approx 2.25 > 1.96$$

Por lo tanto rechazo la hipótesis H_0 y concluyo que la inundación cambió el pH medio de los campos de soja.

$$p = \mathbb{P}\left(-2.25 \leqslant z \leqslant 2.25 | H_0\right) \approx 0.02.$$

Si quisiera no rechazar la hipótesis nula entonces debería tomar un error de Tipo I que sea menor que el p-valor, es decir, un error menor que 0.02.

(ii)

$$\mu = 5.2 \implies \beta = \mathbb{P}\left(-1.96 \leqslant z \leqslant 1.96 | \mu = 5.2\right)$$

$$\begin{aligned} \implies \beta &= \mathbb{P}\left(-1.96 + \frac{\sqrt{15} \cdot 5}{\sqrt{0.25}} - \frac{\sqrt{15} \cdot 5.2}{\sqrt{0.25}} \leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_{15} - \mu}{\sigma} \leqslant 1.96 + \frac{\sqrt{15} \cdot 5}{\sqrt{0.25}} - \frac{\sqrt{15} \cdot 5.2}{\sqrt{0.25}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-3.5 \leqslant z \leqslant 0.41\right) \\ &= \Phi\left(0.41\right) - \Phi\left(-3.5\right) \\ &\approx 0.66 \end{aligned}$$

(iii)

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, 0.25\right) \implies z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Como z es una función de la esperanza pero su distribución no depende de ella tomemos la función pivote $T\left(X, \mu\right) = z$.

$$\mathbb{P}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant T \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - 0.5 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\mathbb{P}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant T \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.95$$

$$\implies I = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\implies I = [5.04, 5.54]$$

Este intervalo de confianza es exacto ya que no tuvimos que usar el Teorema Central del Límite ni ninguna otra aproximación.

2. Segundo Parcial 2° Cuatrimestre 2016

2.1. Ejercicio 1

2.1.1. Ítem a

Notemos X como el horario de llegada de un empleado centrada a las 10:00 - es decir - si $X = x$ entonces ese empleado llego a las 10:00 + x minutos. Entonces:

$$X \sim \mathcal{U}\left(-15, 15\right), \; Y = \begin{cases} x & X = x \geqslant 0 \\ 0 & X = x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(Y \leqslant t\right) = 0.5\mathbf{1}\left\{0, 15\right\}(t) + \int\limits_0^t \frac{1}{15 - (-15)}\mathrm{d}x = \left(0.5 + \frac{t}{30}\right)\mathbf{1}\left\{0, 15\right\}(t)$$

$$\Longrightarrow f_Y\left(y\right) = \begin{cases} 0.5 & y = 0 \\ \frac{1}{30}\mathbf{1}\left\{0, 15\right\} & y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow E\left(Y\right) = \int\limits_0^{15} \frac{y}{30}\mathrm{d}y = 3.75$$

$$E\left(Y^2\right) = \int\limits_0^{15} \frac{y^2}{30}\mathrm{d}y = 37.5$$

$$\Longrightarrow V\left(Y\right) = 37.5 - 3.75^2 = 23.4375$$

2.1.2. Ítem b

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \; \bar{Y}_n = \frac{1}{n}T$$

$$\mathbb{P}\left(T_{45} > 200\right) = \mathbb{P}\left(\bar{Y}_{45} \gtrsim 4.4\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{Y}_{45} - \mu}{\sigma} \gtrsim 0.96\right)$$

$$TCL \rightarrow \approx \mathbb{P}\left(z \geqslant 0.96\right) = 0.17$$

2.1.3. Ítem c

$$\mathbb{P}\left(T_n > 350\right) = 0.95$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{Y}_n - \mu}{\sigma} \gtrsim \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{350}{n} - 3.75}{\sqrt{23.4375}}\right) \approx \mathbb{P}\left(z \geqslant \frac{72.29}{\sqrt{n}} - 0.77\sqrt{n}\right) = 0.95$$

$$\Longrightarrow \frac{72.29}{\sqrt{n}} - 0.77\sqrt{n} \geqslant -1.65$$

$$\Longrightarrow 5225.8 - 111.33n + 0.59n^2 \geqslant 2.72n$$

$$\Longrightarrow n \geqslant 119$$

2.1.4. Ítem d

Hallar $I \,/\, \mathbb{P}\left(\bar{Y}_{45} \in I\right) = 0.8$.

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \bar{Y}_{45} \leqslant b\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{45} \cdot \frac{a - 3.75}{\sqrt{23.4375}} \leqslant z \leqslant \sqrt{45} \cdot \frac{b - 3.75}{\sqrt{23.4375}}\right) = 1 - 0.2$$

$$TCL \rightarrow \mathbb{P}\left(a \leqslant \bar{Y}_{45} \leqslant b\right) \approx \mathbb{P}\left(-z_{0.1} \leqslant z \leqslant z_{0.1}\right),\ z_{0.1} = 1.29$$

$$\implies \sqrt{45} \cdot \frac{b - 3.75}{\sqrt{23.4375}} = 1.29,\ \sqrt{45} \cdot \frac{a - 3.75}{\sqrt{23.4375}} = -1.29$$

$$\implies a = 2.82,\ b = 4.68$$

$$\implies I = [2.82, 4.68]$$

2.2. Ejercicio 2

2.2.1. Ítem a

$$f\left(x; \theta\right) = \exp\left(-\left(x - \theta\right)\right) \mathbf{1}\left\{\theta, \infty\right\}\left(x\right)$$

$$\implies \mathcal{L}\left(X, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right) \iff \theta \leqslant X_i \,\forall i \iff \theta \leqslant \min\left(X_i\right)$$

Como $\mathcal{L}$ es estrictamente creciente entonces el mayor valor de la función se alcanza en el borde, es decir, cuando $\theta = \min\left(X_i\right)$. Por eso, el estimador de máxima verosimilitud es $\hat{\theta}_n = \min\left(X_i\right)$.

2.2.2. Ítem b

$$\begin{aligned} E\left(X\right) &= \int_{\theta}^{\infty} x \exp\left(-\left(x - \theta\right)\right) \mathrm{d}x \\ &= \exp\left(\theta\right)\left(\left(-x \exp\left(-x\right)\right)\Big|_{\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} \exp\left(-x\right) \mathrm{d}x\right) \\ &= \exp\left(\theta\right)\left(\theta \exp\left(-\theta\right) + \exp\left(-\theta\right)\right) \\ &= \theta + 1 \end{aligned}$$

$$\implies \hat{\theta}_n = \bar{X}_n - 1$$

2.2.3. Ítem c

Estimador de Momentos:

$$E\left(\hat{\theta}_n\right) = E\left(\bar{X}_n\right) - 1 = \theta$$

Es insesgado.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|>\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-1-\theta\right|>\epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-\underbrace{(\theta+1)}_{=E(X)}\right|>\epsilon\right) \\
&= \left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|>\epsilon\right) \\
LGN \rightarrow & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Es consistente.

Estimador de Máxima Verosimilitud:

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n \leqslant t\right) = \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right) \leqslant t\right) = 1-\mathbb{P}\left(X_i \geqslant t \,\forall i\right) = 1-\left(\int_t^\infty \exp\left(-\left(x-\theta\right)\right)\mathrm{d}x\right)^n$$

$$\implies \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n \leqslant t\right) = 1-\exp\left(-n\left(t-\theta\right)\right)\mathbf{1}\left\{\theta,\infty\right\}(t)$$

$$\implies f_{\hat{\theta}_n}(x) = -n\exp\left(-n\left(x-\theta\right)\right)\mathbf{1}\left\{\theta,\infty\right\}(x)$$

$$\begin{aligned}
\implies E\left(\hat{\theta}_n\right) &= -n\int_\theta^\infty x\exp\left(-n\left(x-\theta\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= -n\exp\left(n\theta\right)\left(-\frac{1}{n}x\exp\left(-nx\right)\Big|_\theta^\infty+\frac{1}{n}\int_\theta^\infty \exp\left(-nx\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= -n\exp\left(n\theta\right)\left(-\frac{\theta}{n}\exp\left(-n\theta\right)+\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\theta\right)\right) \\
&= \theta-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el estimador no es insesgado pero es asintóticamente insesgado ya que $\hat{\theta}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|>\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\text{mín}\left(X_i\right)-\theta\right|>\epsilon\right) \\
X_i>\theta\,\forall i \rightarrow &= \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(X_i\right)-\theta>\epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_i>\epsilon+\theta\,\forall i\right) \\
&= \left(\int_{\theta+\epsilon}^\infty \exp\left(-\left(x-\theta\right)\right)\mathrm{d}x\right)^n \\
&= \exp\left(-n\epsilon\right) \\
LGN \rightarrow & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Es consistente.

2.3. Ejercicio 3

2.3.1. Ítem a

$$X \sim Be\left(p\right) \implies E\left(X\right) = p,\, V\left(X\right) = p\left(1-p\right)$$

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p\left(1-p\right)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

$$\sqrt{p\left(1-p\right)} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant T \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - 0.05$$

$$\implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\implies I = \left[\bar{X}_n - \frac{0.5}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{0.5}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$I = [0.10, 0.38]$$

2.3.2. Ítem b

$$\begin{aligned} L &= \left(\bar{X}_n + \frac{0.5}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(\bar{X}_n - \frac{0.5}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$L < 0.1 \implies n > \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{0.1}\right)^2$$

$$n \geqslant 385$$

2.4. Ejercicio 4

2.4.1. Ítem a

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 300 \\ H_1: & \mu > 300 \end{cases},\, \alpha = 0.01,\, n = 9,\, X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma\right)\, i.i.d$$

Dados $\bar{X}_n$ y s vamos a armar un estadístico $T = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{s} \sim t_{n-1}$. Entonces, $t_\alpha = 2.8965$. Si $T > t_\alpha$ entonces vamos a rechazar la hipótesis nula, de otra forma no.

2.4.2. Ítem b

$$\bar{X}_9 = 304,\, s = 14.31 \implies T = 0.84$$

Como no se cumple que $T > t_\alpha$ entonces no podemos rechazar la hipótesis nula.

2.4.3. Ítem c

$$p = \mathbb{P}(t \geqslant 0.84) \in (0.1, 0.25)$$

La tabla lastimosamente no me da mejor "resolución" que eso. Si hubiésemos elegido un $\alpha = 0.05$ tampoco hubiésemos rechazado ya que $0.05 < 0.1$.

3. Recuperatorio del Segundo Parcial 1° Cuatrimestre 2016

3.1. Ejercicio 1

3.1.1. Ítem a

Tomemos S como la altura en metros que salta la rana. Sabemos que $S \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 0.5$ así que $\lambda = 2$. Sabemos que la rana va a saltar a lo sumo 2 veces en un día. Si en el primer salto supera la altura del pozo, o sea, si $S_1 \geqslant 1$ entonces sale del pozo y no salta más. Si no, salta devuelta. Sin importar si supera la altura del pozo o no ya no salta más ese día. O sea que si X indica cuantos saltos va a hacer en un día tenemos que:

$$X = \begin{cases} 1 & S_1 \geqslant 1 \\ 2 & S_1 < 1 \end{cases}.$$

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 1) = \int_1^\infty 2\exp(-2x)\,\mathrm{d}x = \exp(-2)$$

$$\implies P_x = \begin{cases} \exp(-2) & 1 \\ 1 - \exp(-2) & 2 \end{cases}$$

3.1.2. Ítem b

Tomemos T_n como la cantidad de saltos que Anastasia da en n días, es decir:

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{80} > 140) &= 1 - \mathbb{P}(T_{80} \leqslant 140) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bar{X}_{80} \leqslant \frac{140}{80}\right) \end{aligned}$$

$$E(X) = \exp(-2) + 2(1 - \exp(-2)) = 2 - \exp(-2)$$

$$V(X) = \exp(-2) + 4(1 - \exp(-2)) - (2 - \exp(-2)) = 2 - 2\exp(-2)$$

$$\begin{aligned} \implies \mathbb{P}(T_{80} > 140) &= 1 - \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_{80} - \mu}{\sigma} \leqslant \sqrt{80} \cdot \frac{1.75 - 1.86}{\sqrt{1.73}}\right) \\ TCL \rightarrow &\approx 1 - \mathbb{P}(z \leqslant 0.75) \\ &\approx 1 - 0.23 \\ &\approx 0.77 \end{aligned}$$

3.1.3. Ítem c

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_n > 40\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(T_n \leqslant 40\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_{80} - \mu}{\sigma} \leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{40}{n} - 1.86}{\sqrt{1.73}}\right) \\
TCL \rightarrow &\approx 1 - \mathbb{P}\left(z \leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{40}{n} - 1.86}{\sqrt{1.73}}\right) = 0.99
\end{aligned}
$$

$$\implies \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{40}{n} - 1.86}{\sqrt{1.73}} \leqslant 2.33$$

$$\frac{30.4}{\sqrt{n}} - 1.41\sqrt{n} \leqslant 2.33$$

$$30.4 - 1.41n \leqslant 2.33\sqrt{n}$$

$$924.855 - 86.01n + 2n^2 \leqslant 5.43n$$

$$n \geqslant 31$$

3.2. Ejercicio 2

3.2.1. Ítem a

$$X \sim \mathcal{P}\left(3\right),\ X_1 + X_2 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(3n\right),\ i.i.d.$$

$$\implies \mathbb{P}\left(2 \nmid X_1 | X_1 + X_2 = 5\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = 2i - 1\right)\mathbb{P}\left(X_2 = 5 - (2i - 1)\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = 5\right)}$$

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) \approx \begin{cases} 0.05 & k = 0 \\ 0.15 & k = 1 \\ 0.22 & k = 2 \\ 0.22 & k = 3 \\ 0.17 & k = 4 \\ 0.1 & k = 5 \end{cases},\ \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = 5\right) \approx 0.16$$

$$\implies \mathbb{P}\left(2 \nmid X_1 | X_1 + X_2 = 5\right) \approx 0.49$$

3.2.2. Ítem b

Tomemos E como el evento "El segundo estudiante se graduó el segundo mes". Entonces, la probabilidad de que esto ocurra es:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 \geqslant 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 \geqslant 1)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\left(1 - \sum_{i=0}^{1} \mathbb{P}(X_2 = i)\right) + \mathbb{P}(X_1 = 1)(1 - \mathbb{P}(X_2 = 0)) \\ &= 0.04 + 0.05 = 0.09 \end{aligned}$$

3.2.3. Ítem c

Tomemos M_n como la cantidad de mujeres egresadas en n meses y H_n como la cantidad de hombres egresados en n meses. Entonces, dado que alguna persona se recibió la probabilidad de que sea hombre es de 0.9 y de que sea mujer es 0.1. Por lo tanto:

$$H_n + M_n \sim \mathcal{P}(3n)$$

$$H_n \sim \mathcal{P}(2.7n), \; M_n \sim \mathcal{P}(0.3n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_2 = 4 | M_2 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(H_2 = 4, M_2 = 1)}{\mathbb{P}(M_2 = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_2 = 4)\,\mathbb{P}(M_2 = 1)}{\mathbb{P}(M_2 = 1)} \\ &= \mathbb{P}(H_2 = 4) \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

3.3. Ejercicio 3

3.3.1. Ítem a

$$f_X(x; \mu) = 5\mu x^4 \exp\left(-\mu x^5\right) \mathbf{1}\{0, \infty\}(x), \; \mu > 0$$

$$\begin{aligned} \implies \mathcal{L}(X, \mu) &= \prod_{i=1}^{n} 5\mu X_i^4 \exp\left(-\mu X_i^5\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X_i} \exp\left(-\mu X_i^5\right)\right) \end{aligned}$$

$$\implies \ln(\mathcal{L}(X, \mu)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(5) + \ln(\mu) + 4\ln(X_i) - \mu X_i^5\right)$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \ln(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_n} - X_i^5\right) = 0$$

$$\implies \hat{\mu}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^5}$$

3.3.2. Ítem b

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \ln(\mathcal{L}) &= \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \ln(\mathcal{L}) \\
&= -\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \ln(\mathcal{L}) \\
&= -\frac{1}{\hat{\beta}_n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\beta}_n - X_i^5\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\implies \hat{\beta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^5
$$

Tomo:

$$
Y = X^5
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \mathbb{P}(Y \leqslant t) &= \mathbb{P}\left(X \leqslant t^{\frac{1}{5}}\right) \\
&= \int_0^{t^{\frac{1}{5}}} 5\mu x^4 \exp\left(-\mu x^5\right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{t^{\frac{1}{5}}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(-\mu x^5\right) \mathrm{d}x \\
&= 1 - \exp(-\mu t)
\end{aligned}
$$

$$
\implies f_Y(y;\mu) = \mu \exp(-\mu y) \mathbf{1}\{0,\infty\}(y)
$$

$$
\implies Y \sim \mathcal{E}(\mu)
$$

$$
\hat{\beta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma\left(n, \frac{n}{\beta}\right)
$$

3.3.3. Ítem c

$$
E\left(\hat{\beta}_n\right) = \frac{n}{\frac{n}{\beta}} = \beta
$$

Es insesgado.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\beta}_n - \beta\right| > \epsilon\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\beta}_n - E\left(\hat{\beta}_n\right)\right| > \epsilon\right) \\
LGN \rightarrow &= 0
\end{aligned}
$$

Es consistente.

3.3.4. Ítem d

Tomo la función pivote:

$$T\left(X,\mu\right)=\frac{2n}{\beta}\bar{Y}_n\sim\Gamma\left(n,0.5\right)=\chi^2_{2n}$$

$$\implies \mathbb{P}\left(\gamma_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\frac{2n}{\beta}\bar{Y}_n\leqslant\gamma_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\implies I=\left[\frac{2n\bar{Y}_n}{\gamma_{1-\frac{\alpha}{2}}},\frac{2n\bar{Y}_n}{\gamma_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

$\alpha=0.1,\ n=15,\ \bar{Y}_{15}=0.853\implies\gamma_{\frac{\alpha}{2}}=18.493,\ \gamma_{1-\frac{\alpha}{2}}=43.773.$

$$\implies I=[0.58,1.38]$$

3.4. Ejercicio 4

3.4.1. Ítem a

$$\begin{cases}H_0: & \mu=15\\ H_1: & \mu>15\end{cases},\ X_i\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)\ i.i.d.,\ \bar{X}_{15}=17,\ \hat{s}_{15}=4,\ \alpha=0.05$$

Tomo $z=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_{15}-\mu}{\hat{s}_{15}}$ y entonces:

$$\mathbb{P}\left(z>\tau_\alpha|H_0\right)=\alpha,\ z\sim t_{n-1}$$

Si llegara a resultar que $z>\tau_\alpha$ entonces se echa al investigador por incompetencia, si no, no se lo echa (pero le guardás bronca). Como $z=1.94,\ \tau_\alpha=1.76\implies z>\tau_\alpha\implies$ rechazamos H_0 y echamos al investigador.

3.4.2. Ítem b

$$p=\mathbb{P}\left(x>z|H_0\right),\ x\sim t_{n-1}$$

$$\implies p\in(0.025,0.05)$$

Esto significa que para cualquier $\alpha\geqslant 0.05$ rechazamos la hipótesis nula.

3.4.3. Ítem c

Tomemos la función pivote:

$$T\left(X,\mu\right)=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n-\mu}{\hat{s}_n}\sim t_{n-1}$$

$$\implies \mathbb{P}\left(-\tau_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant T\left(X,\mu\right)\leqslant\tau_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\implies I=\left[\bar{X}_n-\frac{\hat{s}_n}{\sqrt{n}}\tau_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}_n+\frac{\hat{s}_n}{\sqrt{n}}\tau_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\implies I=[15.18,18.82]$$