Apuntes para el Final de Mecánica Clásica

Federico Yulita

Invierno, 2019

Si querés ver el resto de mis apuntes los podés encontrar en mi blog. Estos apuntes los hice durante las vacaciones de invierno del 2019. Sin embargo, la materia la cursé durante el segundo cuatrimestre del 2018 con Pablo Dmitruk.

Índice

1. Mecánica Lagrangiana

1.1. Principio de D'Alembert

Empecemos con mecánica Lagrangiana con algunas definiciones. Llamamos **Ligadura** (o **Vínculo**) a alguna relación entre las variables independientes de un sistema. Por ejemplo, dos partículas sujetas por una barra rígida es una ligadura, ya que fija la distancia entre ambas partículas por el largo de la barra. Llamamos a una ligadura **Holónoma** si puede expresarse como una función de las posiciones de las partículas y del tiempo igualada a cero. Cuando una ligadura es independiente del tiempo entonces la llamamos **Esclerónoma** y si el tiempo está expresado explícitamente en la ecuación la llamamos **Reónoma**. Supongamos que tenemos un sistema con N partículas en d dimensiones y con k ligaduras holónomas. Para expresar las posiciones de cada partícula entonces necesito dN variables escalares. Sin embargo, de las ligaduras pueden despejarse k variables y entonces en el sistema quedan $dN - k$ variables que son independientes. Llamamos a esta cantidad los **Grados de Libertad** del sistema y vamos a notar a las variables independientes como **Coordenadas Generalizadas** q_i, $i \in [1, dN - k] \subseteq \mathbb{N}$.

Definamos un **Desplazamiento Virtual** como un pequeño cambio de la configuración del sistema que sea compatible con las ligaduras en un determinado instante. Es decir, es una variación infinitesimal e instantánea de las coordenadas generalizadas que es compatible con las ligaduras del sistema. Definimos entonces el **Trabajo Virtual** como $\delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$, donde $\boldsymbol{F}_i$ es la fuerza que siente la i-ésima partícula y $\boldsymbol{r}_i$ es su posición. Si el sistema está en equilibrio entonces $\boldsymbol{F}_i = 0\,\forall i$. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta W_i = 0.$$

Tomemos $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{f}_i$ donde notamos $\boldsymbol{F}_i^a$ como la fuerza aplicada y $\boldsymbol{f}_i$ como la fuerza proveniente de alguna ligadura. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta W_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

Debido a que las ligaduras sólo limitan el movimiento de las partículas en el sistema y no hacen trabajo entonces tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1}$$

Llamamos a esta ecuación el **Principio de Trabajos Virtuales**. Notemos que si el sistema está en equilibrio entonces:

$$\boldsymbol{F}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \neq 0,\, \boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \implies \boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i = 0 \implies (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{f}_i \implies \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i^a - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i}_{=0} = 0$$

Entonces, obtenemos:

Principio de D'Alembert

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i^a - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2}$$

Esta relación es el **Principio de D'Alembert**.

1.2. Ecuaciones de Lagrange

Hallemos ahora las ecuaciones de Lagrange que son las que definen este nuevo tipo de mecánica, otra perspectiva de la mecánica Newtoniana. Tomemos $M = dN - k$ como los grados de libertad y tomemos a las posiciones $\boldsymbol{r}_i$ como una función de todas las coordenadas generalizadas q_j y el tiempo; es decir tomemos $\boldsymbol{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_M, t\right) \overset{\text{def}}{:=} \boldsymbol{r}_i\left(q_j, t\right)$. Notemos:

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,\ \boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{F}_i^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Definamos la **Fuerza Generalizada** como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{M} Q_j \delta q_j \tag{3}$$

Notemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Tomando m_i constante para cada partícula.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

Notemos que vale que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j},\ \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \underbrace{\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{= \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \| \boldsymbol{v}_i \|^2}{\partial \dot{q}_j}} - \underbrace{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}}_{= \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \| \boldsymbol{v}_i \|^2}{\partial q_j}} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \parallel \boldsymbol{v}_i \parallel^2 \right)}_{=T} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \parallel \boldsymbol{v}_i \parallel^2 \right)}_{=T} \right) \delta q_j$$

Finalmente, usando la expresión 3 y usando el principio de D'Alembert (2) obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{F}_i^a - \dot{\boldsymbol{p}}_i\right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(Q_j - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j = 0$$

Ya que las coordenadas generalizadas son independientes entre sí el único modo de que esta suma sea siempre nula es que lo que esté dentro del paréntesis sea nulo. Por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Notemos que estas son M ecuaciones diferenciales escalares, lo cual es una gran ventaja si se las compara con las dN ecuaciones de Newton que son ecuaciones diferenciales vectoriales. Supongamos ahora que a las fuerzas las podemos escribir como el gradiente de un potencial V. Es decir:

$$\exists V \,/\, \boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i V$$

Entonces, usando la ecuación 3:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^{N} \left(-\boldsymbol{\nabla}_i V\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_j} \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \left(T - V\right)}{\partial q_j} = 0$$

Supongamos que el potencial es independiente de las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas. Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \left(T - V\right)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \left(T - V\right)}{\partial q_j} = 0$$

Definamos entonces el **Lagrangiano** como $\mathcal{L} = T - V$ y entonces:

Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \tag{4}$$

Estas son las famosas **Ecuaciones de Lagrange** que definen a la mecánica Lagrangiana. Ésta consta de resolver estas ecuaciones diferenciales en vez de resolver las ecuaciones de Newton. Las ventajas son que las ecuaciones son escalares y que son menos ya que los vínculos ya fueron introducidos por cómo se definieron las coordenadas generalizadas.

Antes de pasar al siguiente tema veamos de donde sale el Lagrangiano para una partícula en un campo electromagnético. Sabemos de F3 que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ y que $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varphi$. También conocemos la Fuerza de Lorentz que es $\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$. Entonces:

$$\boldsymbol{F} = q\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{v} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}\right)\right)$$

Particularicemos las siguientes cuentas para la coordenada x ya que se desarrollan de manera análoga para las otras coordenadas.

$$F_x = q\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \underbrace{v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{=\phi}\right)$$

Notemos:

$$\phi = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \implies F_x &= q\left(-\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \\ &= q\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Tomemos entonces $U = q\left(\varphi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)$:

$$\implies F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\implies \mathcal{L} = T - q\varphi + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

En este caso U es un ejemplo de lo que llamamos un **Potencial Generalizado**. Estos son potenciales que cumplen que:

$$Q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

y entonces se puede definir al Lagrangiano como $\mathcal{L} = T - U$.

2. Principio Variacional

Empecemos este capítulo definiendo la **Acción** como:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) \mathrm{d}t.$$

El **Principio de Hamilton** dice que la trayectoria que toma un sistema es la que extrema a la acción. Este principio es parecido al Principio de Fermat y además vamos a demostrar a que es equivalente a las ecuaciones de Lagrange. Consideremos un variación infinitesimal de la acción extremada δS:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta\mathcal{L}\mathrm{d}t = 0$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q\right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \delta q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \end{aligned}$$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \delta q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right|_{t_i}^{t_f} = 0$$

Esto último vale porque $\delta q\,(t_i) = \delta q\,(t_f) = 0$ ya que los puntos iniciales del camino por donde integramos no pueden cambiar, solo la trayectoria en sí. Entonces:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta q\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\mathrm{d}t = 0$$

La única forma de que esto se cumpla para cualquier desviación δq es pidiendo que el término dentro del paréntesis sea nulo. Por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Así terminamos de demostrar que el Principio de Hamilton es consistente con las ecuaciones de Lagrange, que a su vez son consistentes con las ecuaciones de Newton.

3. Simetrías y Leyes de Conservación

Definimos el **Momento Generalizado** como:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Definimos a una coordenada como **Cíclica** si el Lagrangiano es independiente de ella - es decir - llamamos a q_i una coordenada cíclica si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$. Es evidente que si una coordenada es cíclica entonces el momento generalizado de esa coordenada se conserva - es decir - si q_i es una coordenada cíclica entonces $\dot{p}_i = 0$. Definamos también algunos tipos de simetrías. Decimos que un sistema tiene **Homogeneidad Espacial** si al desplazar al sistema entero el Lagrangiano no es afectado. Decimos que un sistema es **Isótropo** si al rotar al sistema entero el Lagrangiano no es afectado. Finalmente, decimos que un sistema tiene **Homogeneidad Temporal** si al desplazar al sistema entero en el tiempo el Lagrangiano no es afectado. Veamos que significan estos conceptos matemáticamente. Consideremos el caso de homogeneidad espacial y hagamos un desplazamiento infinitesimal $\delta \boldsymbol{R}$ al sistema entero. Lo que esto significa es desplazar a todas las partículas del sistema por este desplazamiento infinitesimal. Entonces:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{r}_i}\delta \boldsymbol{r}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{r}_i}\right)\delta \boldsymbol{R}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = \dot{\boldsymbol{p}}_i$$

$$\begin{aligned}\implies \delta \mathcal{L} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{p}}_i\right)\delta \boldsymbol{R} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i\right)\delta \boldsymbol{R} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \text{cte.}$$

Esto significa que para un sistema con homogeneidad espacial el momento total se conserva. Consideremos ahora un sistema isótropo al que lo rotamos un ángulo $\delta\boldsymbol{\phi}$:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i \implies \delta\dot{\boldsymbol{r}}_i = \delta\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{r}}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i) + \boldsymbol{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i) + \delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \right) \\
&= \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \right) \\
&= \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{L}}_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i = \text{cte.}$$

Esto significa que para un sistema isótropo el momento angular se conserva. El **Teorema de Noether** generaliza estos resultados ya que establece que para cada desplazamiento infinitesimal de simetría hay una constante de movimiento asociada. Tomemos una coordenada q_j y hagamos un cambio infinitesimal a la acción δS tal que $\delta q_j = \frac{\partial q_j}{\partial S} \delta S$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)\delta q_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{M}\left(-\left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}}_{=0}\right)\delta q_j + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\\
&= \delta S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial S}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\implies \sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial S} = \text{cte.}
$$

Apliquemos entonces este teorema al caso del sistema con homogeneidad temporal:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{M}\left(\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}}_{=\dot{p}_j}\dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}}_{=p_j}\ddot{q}_j\right) + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}}_{=0}\\
&= \sum_{j=1}^{M}\left(\dot{p}_j\dot{q}_j + p_j\ddot{q}_j\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{M}p_j\dot{q}_j
\end{aligned}
$$

$$
\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{M}\dot{q}_j p_j - \mathcal{L}\right) = 0
$$

Tomemos:

$$
\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{M}\dot{q}_j p_j - \mathcal{L}
$$

$$
\implies \mathcal{H} = \text{cte.}
$$

A esta función la llamamos **Hamiltoniano**. Supongamos ahora que tenemos un sistema donde los vínculos son esclerónomos y que el potencial no depende de $\dot{q}$:

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \parallel \dot{\boldsymbol{r}}_i \parallel^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \parallel \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \parallel^2
\end{aligned}
$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\parallel \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \parallel^2 &= \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \\
&= \sum_{j,k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k
\end{aligned}
$$

$$
\implies T = \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{5}
$$

Tomemos:

$$
a_{jk} = \sum_{i} \frac{1}{2} m \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j,k} \left(a_{jk} \delta_{jl} \dot{q}_k + a_{jk} \delta_{kl} \dot{q}_j \right) \\
&= \sum_{k} a_{jk} \dot{q}_k + \sum_{j} a_{jk} \dot{q}_j \\
a_{jk} = a_{kj} \rightarrow &= 2 \sum_{n} a_{nl} \dot{q}_n
\end{aligned}
$$

$$
\implies T = \sum_{l} \frac{1}{2} \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}
$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j} \dot{q}_j p_j &= \sum_{j} \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \\
&= \sum_{j} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \\
&= \sum_{j} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \\
&= 2T
\end{aligned}
$$

$$
\implies \mathcal{H} + \mathcal{L} = 2T
$$

$$
\implies \mathcal{H} = T + V
$$

Bajo estas condiciones el Hamiltoniano es igual a la energía mecánica del sistema.

4. Problema de Dos Cuerpos y Ecuaciones de Kepler

En esta sección vamos a tratar con el problema de dos cuerpos atraídos por un potencial radial y al final vamos a considerar que el potencial tiene la forma del potencial gravitatorio para demostrar las ecuaciones de Kepler. Para estos sistemas el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1 \parallel \dot{\boldsymbol{r}}_1 \parallel^2 + \frac{1}{2}m_2 \parallel \dot{\boldsymbol{r}}_2 \parallel^2 - V$. Definamos el **Centro de Masa** como:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{M},\ M = m_1 + m_2.$$

Tomemos también:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$\implies \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}$$

$$\begin{aligned}
\implies \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1 \parallel \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}} \parallel^2 + \frac{1}{2}m_2 \parallel \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\boldsymbol{r}} \parallel^2 - V \\
&= \frac{1}{2}m_1 \parallel \boldsymbol{R} \parallel^2 - \cancel{\frac{m_1m_2}{M}\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2}{M^2} \parallel \dot{\boldsymbol{r}} \parallel^2 + \frac{1}{2}m_2 \parallel \boldsymbol{R} \parallel^2 + \cancel{\frac{m_1m_2}{M}\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2m_2}{M^2} \parallel \dot{\boldsymbol{r}} \parallel^2 - V \\
&= \frac{1}{2}M \parallel \boldsymbol{R} \parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M} \parallel \dot{\boldsymbol{r}} \parallel^2 - V
\end{aligned}$$

Definamos la **Masa Reducida** como:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{M}$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}M \parallel \dot{\boldsymbol{R}} \parallel^2 + \frac{1}{2}\mu \parallel \dot{\boldsymbol{r}} \parallel^2 - V\left(\parallel \boldsymbol{r} \parallel\right)$$

Notemos que este Lagrangiano tiene la ventaja de que $\boldsymbol{R}$ es una coordenada cíclica y además si cambiamos a coordenadas esféricas para $\boldsymbol{r}$ con el origen en $\boldsymbol{R}$ entonces vale que el momento angular se conserva ya que el sistema es isotrópico. Esto significa que sin pérdida de generalidad podemos tomar $\dot{\boldsymbol{R}} = 0$ y tomar coordenadas cilíndricas centradas en $\boldsymbol{R}$ tal que $\hat{\boldsymbol{z}} \parallel \boldsymbol{L}$ y entonces el Lagrangiano queda así:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 - V\left(r\right)$$

Notemos que θ es una coordenada cíclica ya que el momento angular se conserva. Entonces:

$$p_\theta = \mu r^2\dot{\theta} = L_z$$

$$\implies \dot{\theta} = \frac{L_z}{\mu r^2}$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - V\left(r\right)$$

Tomemos la **Velocidad Aerolar** como:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\dot{\theta}r^2.$$

Notemos que para un pequeño intervalo de tiempo esta cantidad es aproximadamente el área que barre la partícula ya que es aproximadamente un triángulo de altura r y base $r\dot{\theta}$. En la **Figura 1** está esquematizado este concepto. Notemos entonces que $L_z = 2\mu\dot{A} \implies \ddot{A} = 0$. Esto significa que el área que barre la partícula es la misma para iguales intervalos de tiempo sin importar en qué parte de la trayectoria esté. A esta ley se la llama **Segunda Ley de Kepler**. Consideremos ahora al Hamiltoniano del sistema. Ya que el sistema tiene homogeneidad temporal

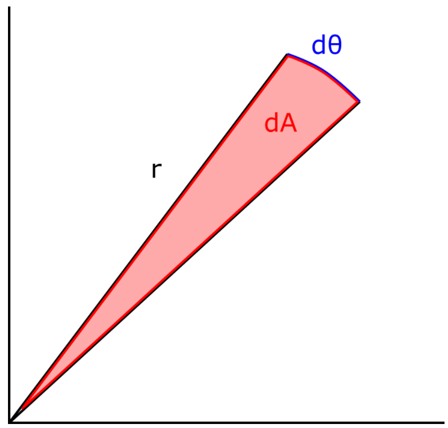

Figura 1: Área barrida por la partícula en un instante.

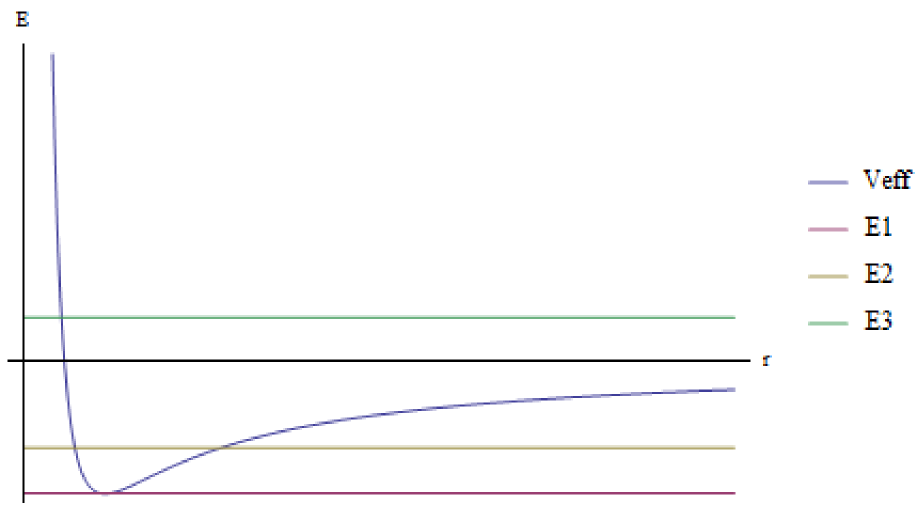

Figura 2: Gráfico del potencial efectivo con $V(r) = -\frac{V_0}{r}$ y de algunos niveles de energía característicos.

el Hamiltoniano se conserva, y como los vínculos son esclerónomos y el potencial no depende de las velocidades entonces el Hamiltoniano es igual a la energía mecánica. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= T + V \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + V(r)\end{aligned}$$

Ya que la única coordenada es r entonces suele considerarse al primer término como la energía cinética del sistema y a los últimos dos como un potencial efectivo V_{eff}. La ventaja de hacer esto es que el potencial efectivo nos dice los posibles movimientos que puede hacer la partícula. En la **Figura 2** puede verse del potencial efectivo con algunos de niveles de energía que describen distintos movimientos tomando $V(r) = -\frac{V_0}{r}$. Cuando $E = E_1$ la partícula solo tiene un radio posible y entonces describe un movimiento circular. Cuando $E = E_2$ el rango de "radios" posibles que puede tomar la partícula está acotado y entonces el movimiento de la partícula es elíptico. Finalmente, cuando $E = E_3$la partícula tiene un radio de máximo acercamiento y su movimiento es hiperbólico. También existe el caso donde $E = 0$ y entonces en $r = \infty$ $E = V_{eff}$. En este caso, el movimiento de la partícula está en el límite de ser hiperbólico o elíptico y es parabólico.

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{L_z}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{eff}\right)}
\end{aligned}
$$

Haciendo las integrales respectivas de cada lado nos queda:

Ecuación de Órbita

$$
\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{L_z^2}{2\mu\left(E - V_{eff}\right)}}\mathrm{d}r
$$

A esta ecuación se la llama **Ecuación de Órbita** y de resolver esta integral puede despejarse $r\left(\theta\right)$.
Ya que el Hamiltoniano se conserva entonces se derivamos con respecto al tiempo hallamos que:

$$
\mu\ddot{r} - \frac{L_z^2}{\mu r^3} + V^{'}\left(r\right) = 0
$$

Tomemos:

$$
u = \frac{1}{r},\ f\left(u\right) = -\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=\frac{1}{u}}
$$

$$
\implies \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\mu^2 r^2\ddot{r}}{L_z^2}
$$

$$
\implies \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L_z^2}\frac{f\left(u\right)}{u^2}
$$

Esta ecuación es la ecuación de órbita diferencial. Si usamos el potencial $V\left(r\right) = -\frac{V_0}{r}$ entonces la solución para la ecuación es $u\left(\theta\right) = A + B\cos\left(\theta\right)$. Notemos además que la función $u\left(\theta\right)$ es par y por lo tanto las órbitas que describe son simétricas. Más adelante veremos como deducimos esta solución con más detalle.

Sigamos trabajando con el potencial $V\left(r\right) = -\frac{V_0}{r}$ y hallemos ahora el radio y energía de la órbita circular:

$$
V_{eff}^{'}\left(r\right) = 0 \implies -\frac{L_z^2}{\mu r_c^3} + \frac{V_0}{r_c^2} = 0
$$

$$
\implies r_c = \frac{L_z^2}{\mu V_0}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= V_{eff}\left(r_c\right) \\
&= -\frac{\mu V_0^2}{2L_z^2}
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora que $\mathcal{H} = E$ y resolvamos la ecuación de órbita. Sin pérdida de generalidad tomemos:

$$\theta_0 = -\frac{\pi}{2},\, r_0 = r_c$$

$$\begin{aligned}
\implies \theta + \frac{\pi}{2} &= \int_0^r \frac{L_z}{\sqrt{2\mu E} r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_z^2}{2\mu E r^2} - \frac{V_0}{Er}\right)}} \\
&= -\int \frac{L_z}{\sqrt{2\mu E}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_z^2}{2\mu E} u^2 - \frac{V_0}{E} u\right)}} \\
&= -\int \left(\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{2\mu V_0}{L_z^2} u - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u \\
&= -\int \left(\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4} - \left(u - \frac{\mu V_0}{L_z^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4}}} \int \left(1 - \left(\frac{u - \frac{\mu V_0}{L_z^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4}}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Tomemos:

$$\cos(x) = \frac{u - \frac{\mu V_0}{L_z^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4}}} \implies -\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4}}}$$

$$\begin{aligned}
\implies \theta + \frac{\pi}{2} &= -\arccos\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu V_0}{L_z^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4}}}\right) + \arccos\left(\frac{\frac{1}{r_c} - \frac{\mu V_0}{L_z^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{\mu^2 V_0^2}{L_z^4}}}\right) \\
&= -\arccos\left(\frac{\frac{L_z^2}{\mu V_0 r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L_z^2 E}{\mu V_0^2}}}\right) + \arccos\left(\frac{\frac{L_z^2}{\mu V_0 r_c} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L_z^2 E}{\mu V_0^2}}}\right) \\
&= -\arccos\left(\frac{\frac{r_c}{r} - 1}{\sqrt{1 - \frac{E}{E_1}}}\right) + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente, despejando $r(\theta)$ nos queda:

Ecuación de las Cónicas

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 + \sqrt{1 - \frac{E}{E_1}} \cos(\theta)}$$

A esta ecuación entonces se la llama la **Ecuación de las Cónicas** ya que describe hipérbolas, parábolas, elipses y círculos. Además, definimos $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{E_1}}$ como la **Excentricidad** que es una cantidad que va a determinar que tipo de movimiento describe la partícula. Si $\epsilon = 0$ entonces el movimiento es circular, si $0 < \epsilon < 1$ entonces el movimiento es elíptico, si $\epsilon = 1$ entonces el movimiento es parabólico y si $\epsilon > 1$ entonces el movimiento es hiperbólico. En la **Figura 3** pueden verse gráficos paramétricos de $r(\theta)$ para estas excentricidades mencionadas.

Consideremos ahora una órbita elíptica con un eje semi-mayor a y un eje semi-menor b que está centrada en $(x, y) = (x_0, 0)$ como se muestra en la **Figura 3**. Vale entonces que:

$$r(0) = a + x_0,\, r(\pi) = a - x_0$$

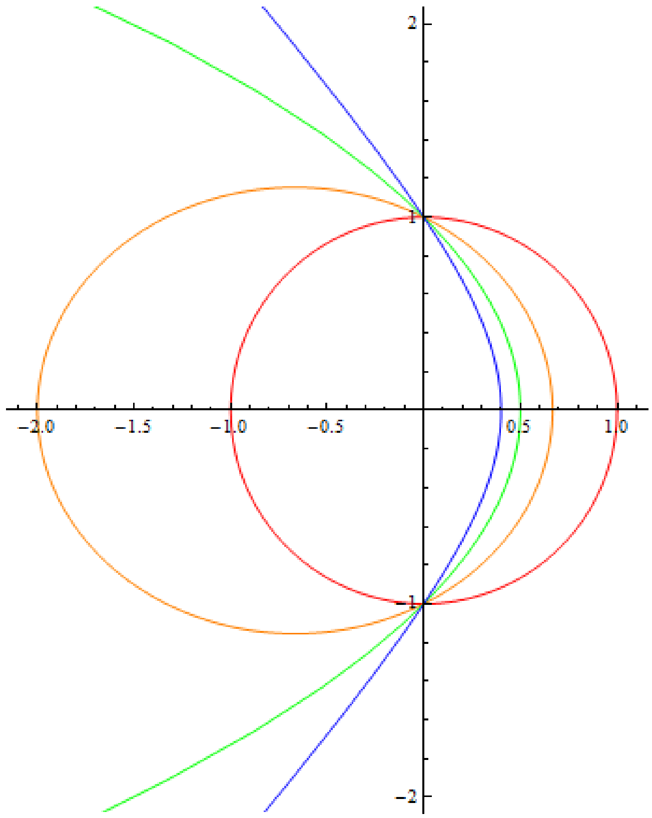

Figura 3: Gráficos paramétricos de $r(\theta)$ con $r_c = 1$ para los distintos valores de ϵ mencionados.

$$\begin{cases} a + x_0 = \frac{r_c}{1+\epsilon} \\ a - x_0 = \frac{r_c}{1-\epsilon} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = \frac{r_c}{1-\epsilon^2} \\ x_0 = -\frac{\epsilon r_c}{1-\epsilon^2} \end{cases}$$

Además, sabemos que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\implies b = \frac{ay}{\sqrt{a^2 - (x-x_0)^2}}$$

Tomemos entonces el punto $(x, y) = (0, r_c)$:

$$\begin{aligned} \implies b &= \frac{ar_c}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= \frac{r_c}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \end{aligned}$$

Notemos que entonces tenemos que:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Esta es la excentricidad de la elipse expresada en término de sus ejes. Esto además concluye con la **Primera Ley de Kepler** que establece que las órbitas de los planetas son elípticas.

Consideremos ahora la velocidad aerolar:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{L_z}{2\mu} \implies \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^{A_T} \frac{2\mu}{L_z}\mathrm{d}A$$

$$\implies T = \frac{2\mu A_T}{L_z}$$

T es el período y A_T es el área que barre la partícula en un período. Si asumimos que las órbitas son elípticas (ya que Kepler estaba interesado en las órbitas de los planetas y la Luna) entonces tenemos que:

$$A_T = \pi ab,\ a = \frac{r_c}{1-\epsilon^2},\ b = \frac{r_c}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

$$\implies b^2 = r_c a \implies T^2 = \frac{4\pi^2\mu^2 r_c a^3}{L_z^2},\ r_c = \frac{L_z^2}{\mu V_0}$$

$$\implies T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{V_0}a^3$$

Esta es la **Tercera Ley de Kepler**. Kepler notó que había una relación lineal con los períodos cuadrados de los planetas y sus ejes semi-mayores cúbicos. Además, notemos que si tomamos $V_0 = GM\mu$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

Kepler notó que todos los planetas tenían mas o menos la misma pendiente y con eso concluyó que la masa de cada planeta es despreciable frente a la masa del sol.

5. Movimiento Oscilatorio

5.1. Oscilaciones sin Disipación

Vamos a suponer que tenemos un sistema con un grado de libertad q que está en equilibrio en q_0 - es decir - que $V^{'}(q_0) = 0$. Entonces, vamos a estudiar el comportamiento del sistema si le hacemos un pequeño cambio a q desde q_0:

$$\begin{aligned} V(q) &\approx V(q_0) + \underbrace{V^{'}(q_0)}_{=0}(q-q_0) + \frac{V^{''}(q_0)}{2}(q-q_0)^2 \\ &= V(q_0) + \frac{V^{''}(q_0)}{2}(q-q_0)^2 \end{aligned}$$

Ya que V es la energía potencial está definida a menos de una constante, por lo tanto puedo elegir $V \,/\, V(q_0) = 0$. Entonces:

$$V(q) \approx \frac{V^{''}(q_0)}{2}(q-q_0)^2$$

Tomemos:

$$V^{''}(q_0) \overset{\mathrm{def}}{:=} V_0^{''},\ \zeta = q - q_0$$

Entonces:

Potencial Armónico

$$V(\zeta) = \frac{1}{2} V_0^{''} \zeta^2$$

Este es el famoso **Potencial Armónico**. Si $V_0^{''} < 0$ entonces el equilibrio q_0 es inestable y si $V_0^{''} > 0$ entonces es estable. El Lagrangiano para este sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} V_0^{''} \zeta^2$$

Generalicemos este problema para un sistema de n grados de libertad con una posición de equilibrio $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$ donde $\frac{\partial V}{\partial q_j}\left(q^0\right) = 0 \, \forall j$. Consideremos a los vínculos esclerónomos y al potencial independiente de las velocidades. Tomemos la energía cinética de 5:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \; M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$$

Tomemos $\zeta_j = q_j - q_j^0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
V &\approx \underbrace{V\left(q^0\right)}_{=0} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_j}\left(q^0\right)}_{=0} \left(q_j - q_j^0\right) + \sum_{j,k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\left(q^0\right)\left(q_j - q_j^0\right)\left(q_k - q_k^0\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\left(q^0\right)\left(q_j - q_j^0\right)\left(q_k - q_k^0\right) \\
&\overset{\text{def}}{\coloneqq} \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk}^0 \zeta_j \zeta_k
\end{aligned}$$

Si tomamos la aproximación de pequeñas oscilaciones podemos tomar $M_{jk}(q) \approx M_{jk}\left(q^0\right) \overset{\text{def}}{\coloneqq} M_{jk}^0$. Entonces, el Lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{2} M_{jk}^0 \dot{\zeta}_j \dot{\zeta}_k - \frac{1}{2} V_{jk}^0 \zeta_j \zeta_k \right)$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}_l} &= \sum_{j,k} \frac{1}{2} M_{jk}^0 \left(\delta_{lj} \dot{\zeta}_k + \delta_{lk} \dot{\zeta}_j\right) \\
&= \sum_j M_{jl}^0 \dot{\zeta}_j \\
\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}_l} &= \sum_j M_{jl}^0 \ddot{\zeta}_j \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta_l} &= -\sum_j V_{jl}^0 \zeta_j
\end{aligned}$$

Entonces, usando las ecuaciones de Lagrange (4) queda:

$$\sum_j \left(M_{jl}^0 \ddot{\zeta}_j - V_{jl}^0 \zeta_j\right) = 0 \, \forall l$$

Estas son n ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden. Lo bueno es que podemos tomar notación matricial y tomar $\bar{\bar{M}}$, $\bar{\bar{V}}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ / $\left[\bar{\bar{M}}\right]_{jl} = M_{jl}^0$, $\left[\bar{\bar{V}}\right]_{jl} = V_{jl}^0$ y $[\boldsymbol{\zeta}]_j = \zeta_j$. Entonces:

$$\bar{\bar{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = 0$$

El Lagrangiano con esta notación es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\zeta}}^{\dagger} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^{\dagger} \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{\zeta}$$

Propongamos la solución $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{A} \exp(i\omega t)$:

$$\implies \left(\bar{\bar{V}} - \omega^2 \bar{\bar{M}}\right) \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

Entonces, si queremos hallar soluciones no triviales debemos pedir que:

$$\det\left(\bar{\bar{V}} - \omega^2 \bar{\bar{M}}\right) = 0$$

Al calcular eso uno va a terminar con un polinomio de grado n para ω^2 del cual puede hallar las soluciones para ω que van a ser los modos normales del sistema y de ahí se encuentran los valores de $\boldsymbol{A}$ que son los autovectores del sistema.

Para lo siguiente vamos a usar una matriz cambio de base que nos simplifique un poco el problema. Para eso vamos a necesitar usar tres propiedades de las matrices $\bar{\bar{M}}$ y $\bar{\bar{V}}$:

1. Si $\bar{\bar{M}}$ y $\bar{\bar{V}}$ son reales y simétricas $\implies$ ω^2 y $\boldsymbol{A}$ son reales.
2. Si $\bar{\bar{V}}$ es definida positiva $\implies$ $\omega \in \mathbb{R}$.
3. Los autovectores $\boldsymbol{A}^{(l)}$ son ortogonales en la métrica $\bar{\bar{M}}$.

Tomemos $\bar{\bar{A}}$ como la matriz cambio de base que está compuesta por los autovectores en sus columnas. Como los autovectores son ortogonales entre sí en la métrica $\bar{\bar{M}}$ entonces $\bar{\bar{A}}^{\dagger} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{1}} \implies \bar{\bar{A}}^{-1} = \bar{\bar{A}}^{\dagger} \cdot \bar{\bar{M}}$.

Cálculos Auxiliares

1.

Notemos:

$$\bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)} = \omega_k^2 \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)}$$

$$\implies \left[\bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{A}}\right]_{lk} = \omega_k^2 \left[\bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{A}}\right]_{lk}$$

$$\implies \sum_j V_{lj} A_{jk} = \sum_j \omega_k^2 M_{lj} A_{jk} \tag{6}$$

Si transponemos, conjugamos y usamos que $\bar{\bar{V}}$ es simétrica y real entonces:

$$\begin{aligned}\left[\bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{A}}\right]_{kj}^{\dagger *} &= \left[\bar{\bar{A}}^{\dagger *} \cdot \bar{\bar{V}}^{\dagger *}\right]_{kj} \\ &= \left[\bar{\bar{A}}^{\dagger *} \cdot \bar{\bar{V}}\right]_{kj} \\ &= \sum_l A_{lk}^{*} V_{lj}\end{aligned}$$

$$\implies \sum_l A_{lk}^{*} V_{lj} = \sum_l \omega_k^{2*} A_{lk}^{*} M_{lj} \tag{7}$$

Notemos entonces que si hacemos $A_{lk}^{*}\,(6) - A_{jk}\,(7)$:

$$\underbrace{\sum_{l,j} A^*_{lk} V_{lj} A_{jk} - \sum_{l,j} A_{jk} A^*_{lk} V_{lj}}_{=0} = \sum_{l,j} A^*_{lk} \omega_k^2 M_{lj} A_{jk} - \sum_{i,j} A_{jk} \omega_k^{2*} A^*_{lk} M_{lj}$$

$$\implies \left(\omega_k^2 - \omega_k^{2*}\right) \sum_{l,j} M_{lj} A^*_{lk} A_{jk} = 0 \tag{8}$$

Tomemos $A_{jk} = \beta_{jk} + i\gamma_{jk}$:

$$\begin{aligned}\implies 0 &= \left(\omega_k^2 - \omega_k^{2*}\right) \sum_{l,j} M_{lj} \left(\beta_{lk} - i\gamma_{lk}\right) \left(\beta_{jk} + i\gamma_{jk}\right) \\ &= \left(\omega_k^2 - \omega_k^{2*}\right) \sum_{l,j} M_{lj} \left(\beta_{lk}\beta_{jk} + \gamma_{lk}\gamma_{jk} + i\left(\beta_{lk}\gamma_{jk} - \beta_{jk}\gamma_{lk}\right)\right)\end{aligned}$$

Como $\bar{\bar{M}}$ es simétrica entonces $\beta_{lk}\gamma_{jk} = \beta_{jk}\gamma_{lk}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\omega_k^2 - \omega_k^{2*}\right) \sum_{l,j} \left(\beta_{lk} M_{lj} \beta_{jk} + \gamma_{lk} M_{lj} \gamma_{jk}\right) \\ &= \left(\omega_k^2 - \omega_k^{2*}\right) \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger(k)} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(k)} + \boldsymbol{\gamma}^{\dagger(k)} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(k)}\right)\end{aligned}$$

$\bar{\bar{M}}$ tiene que ser definida positiva ya que si no la energía cinética podría ser negativa, por lo tanto $\boldsymbol{\beta}^{\dagger(k)} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(k)} > 0$ y $\boldsymbol{\gamma}^{\dagger(k)} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(k)} > 0$. Entonces la única forma de que eso de 0 es que $\omega_k^2 = \omega_k^{2*} \, \forall k$ y la única forma de que esto se cumpla es si $\omega_k^2 \in \mathbb{R}$.
Q.E.D.

2.

Tomemos A_{lk} (6):

$$\sum_{l,j} V_{lj} A_{jk} A_{lk} = \sum_{l,j} M_{lj} A_{jk} \omega_k^2 A_{lk}$$

$$\begin{aligned}\implies \omega_k^2 &= \frac{\sum V_{lj} A_{jk} A_{lk}}{\sum M_{lj} A_{jk} A_{lk}} \\ &= \frac{\boldsymbol{A}^{\dagger(k)} \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)}}{\boldsymbol{A}^{\dagger(k)} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)}}\end{aligned}$$

Como $\bar{\bar{M}}$ y $\bar{\bar{V}}$ son definidas positivas entonces ambos el numerador y el denominador son positivos y entonces $\omega_k \in \mathbb{R} \, \forall k$.
Q.E.D.

3.

Cambiemos el subíndice l de la ecuación (7) por un subíndice ν. Entonces tenemos:

$$\sum_{l} A^*_{\nu k} V_{lj} = \sum_{l} \omega_k^{2*} A^*_{\nu k} M_{\nu j}$$

Entonces de la misma forma que hicimos antes usemos la ecuación (6) para llegar a la ecuación (8) y obtener:

$$\left(\omega_k^2 - \omega_\nu^{2*}\right) \sum_{l,j} M_{lj} A^*_{l\nu} A_{jk} = 0$$

Notemos que si no hay degeneración entonces $\omega_k^2 \neq \omega_\nu^{2*}$.

$$\implies \sum_{l,j} M_{lj} A^*_{l\nu} A_{jk} = 0$$

Entonces, como el sistema $\bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)} = \omega_k^2 \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)}$ no es linealmente independiente, puedo despejar $n-1$ elementos de $\boldsymbol{A}^{(k)}$ en función de algún $\boldsymbol{A}^{(\mu)}$. Por lo tanto, puedo pedir que $\boldsymbol{A}^{(k)\dagger} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)} = 1$. Si tomamos a $\bar{\bar{M}}$ como la métrica del espacio del sistema entonces tenemos que $\boldsymbol{A}^{(k)\dagger} \otimes \boldsymbol{A}^{(k)} = 1$. Por lo tanto, los autovectores son ortogonales en la métrica $\bar{\bar{M}}$.
Q.E.D.

Ya que vamos a usar a $\bar{\bar{M}}$ como métrica entonces el producto interno nos queda definido como $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^\dagger \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{w}$, $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Tomemos $\boldsymbol{\eta} = \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \bar{\bar{A}}^\dagger \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{\zeta}$. El Lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^\dagger \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^\dagger \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{\zeta}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\zeta}}^\dagger \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\dagger \cdot \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{\bar{M}}^{-1} \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\dagger \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^\dagger \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2} \underbrace{\boldsymbol{\zeta}^\dagger \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{A}}}_{=\boldsymbol{\eta}^\dagger} \cdot \bar{\bar{A}}^\dagger \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \underbrace{\bar{\bar{A}}^\dagger \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \boldsymbol{\zeta}}_{=\boldsymbol{\eta}}$$

Tomemos $\bar{\bar{\Omega}} = \bar{\bar{A}}^\dagger \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{A}}$, ya que si $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{1}}$ entonces $\bar{\bar{\Omega}}$ es una matriz con los ω_k^2 en la diagonal. Entonces:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^\dagger \cdot \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^\dagger \cdot \bar{\bar{\Omega}} \cdot \boldsymbol{\eta}$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\dagger \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^\dagger \cdot \bar{\bar{\Omega}} \cdot \boldsymbol{\eta}$$

Finalmente, hallamos el Lagrangiano para el sistema luego de hacer el cambio de base. A esta base se la llama **Base Propia** y lo que logra el cambio de base es cambiar los tensores a unos más simples: $\boldsymbol{\zeta} \to \boldsymbol{\eta}$, $\bar{\bar{M}} \to \bar{\bar{1}}$ y $\bar{\bar{V}} \to \bar{\bar{\Omega}}$.

5.2. Oscilaciones con Disipación

Ahora vamos a introducirle a las oscilaciones un término discipativo proporcional a la velocidad ν. Ya que ahora hay una fuerza que depende de la velocidad debemos introducir la fuerza generalizada a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j,\ Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},\ \boldsymbol{F}_i = -\nu_x^{(i)} \dot{x}_i \hat{\boldsymbol{x}} - \nu_y^{(i)} \dot{y}_i \hat{\boldsymbol{y}} - \nu_z^{(i)} \dot{z}_i \hat{\boldsymbol{z}}$$

Tomemos:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

A esta función se la llama la **Función de Disipación de Rayleigh**. Tiene las siguientes propiedades:

$$\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i \mathcal{F},\, Q_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

Entonces, asumamos que $\nu_x^{(i)} = \nu_y^{(i)} = \nu_z^{(i)}\, \forall i$ y tomemos la matriz $\bar{\bar{F}}$ tal que:

$$F_{jk} = \sum_i \nu^{(i)} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \implies \mathcal{F} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\zeta}}^\dagger \cdot \bar{\bar{F}} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}$$

Entonces, resolviendo las ecuaciones de Lagrange queda la ecuación diferencial:

$$\bar{\bar{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \bar{\bar{F}} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \bar{\bar{V}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = 0$$

A esta matriz puede hacérsele el mismo cambio de base y queda una matriz con $\nu^{(i)}$ en la diagonal.

6. Cuerpo Rígido

Un **Cuerpo Rígido** es un objeto compuesto de infinitas partículas sometidas a ligaduras holónomas que mantienen la distancia entre ellas constantes. Es decir, sean $\boldsymbol{r}_i$ y $\boldsymbol{r}_j$ las posiciones de dos partículas distintas en un cuerpo rígido entonces $\parallel \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \parallel =$ cte.. Un cuerpo rígido en tres dimensiones tiene 6 grados de libertad: 3 de posición y 3 de rotación. Vamos a llamar O al origen de coordenadas de posición del cuerpo rígido y O' al origen de coordenadas de rotación del cuerpo rígido. Además, vamos a usar las coordenadas cartesianas $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ y $\hat{\boldsymbol{z}}$ para la posición y $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}$ para la rotación. Tomemos:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{i}} = \alpha_1 \hat{\boldsymbol{x}} + \alpha_2 \hat{\boldsymbol{y}} + \alpha_3 \hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{j}} = \beta_1 \hat{\boldsymbol{x}} + \beta_2 \hat{\boldsymbol{y}} + \beta_3 \hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} = \gamma_1 \hat{\boldsymbol{x}} + \gamma_2 \hat{\boldsymbol{y}} + \gamma_3 \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$\bar{\bar{A}}$ es una matriz cambio de base que nos lleva de las coordenadas de posición a las de rotación - es decir - $\boldsymbol{r}' = \bar{\bar{A}} \cdot \boldsymbol{r}$. Además, esta matriz es una matriz propia y por lo tanto $\bar{\bar{A}}^{-1} = \bar{\bar{A}}^\dagger$, $\det A = 1$. A esta matriz usualmente se la define usando la convención de los **Ángulos de Euler**. Esta es una convención de ángulos que se utiliza para describir las rotaciones de un cuerpo rígido. En la **Figura 4** están esquematizados estos ángulos. El primer paso para pasar de las coordenadas de posición a las de rotación es rotar al cuerpo rígido un ángulo ϕ en $\hat{\boldsymbol{z}}$. Al nuevo $\hat{\boldsymbol{x}}$ se lo llama **Eje de Nodos** y se lo nota como $\hat{\boldsymbol{n}}$. El siguiente paso es rotar al cuerpo rígido un ángulo θ en $\hat{\boldsymbol{n}}$. El nuevo $\hat{\boldsymbol{z}}$ es el $\hat{\boldsymbol{k}}$. Finalmente, el último paso es rotar al cuerpo rígido un ángulo ψ en $\hat{\boldsymbol{k}}$. Los nuevos $\hat{\boldsymbol{n}}$ y $\hat{\boldsymbol{y}}$ son $\hat{\boldsymbol{i}}$ y $\hat{\boldsymbol{j}}$ respectivamente. Los ángulos ϕ, θ y ψ van a elegirse convenientemente para aprovechar las posibles simetrías del cuerpo rígido y simplificar el problema. La matriz cambio de base expresada en término de los ángulos de Euler va a ser el producto de cada una de estas rotaciones, es decir:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\theta)\sin(\psi) \\ -\cos(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma a cualquier punto del cuerpo rígido lo podemos expresar como $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$, donde $\boldsymbol{R}$ es el vector de posición del cuerpo rígido y $\boldsymbol{r}'$ es el vector dentro del cuerpo rígido que indica la posición del punto en cuestión. $\boldsymbol{R}$ es el vector de traslación del cuerpo rígido y $\boldsymbol{r}'$ el de rotación. Notemos:

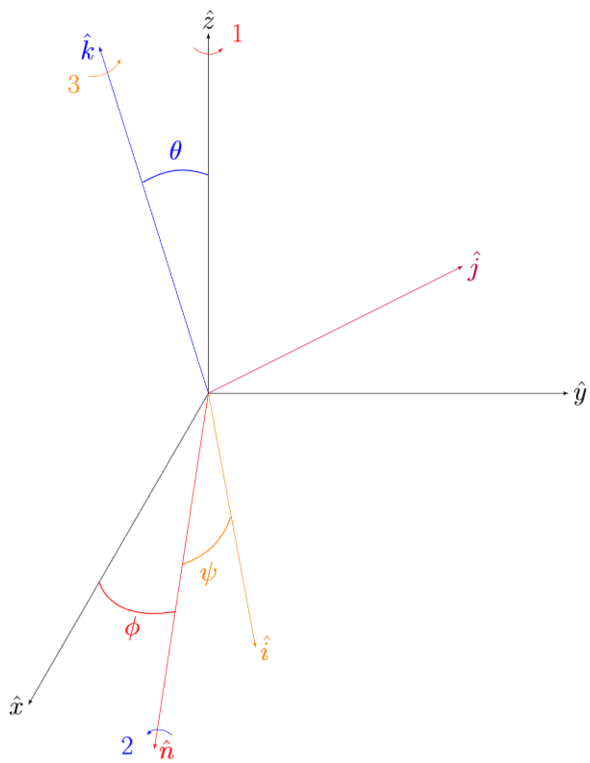

Figura 4: Esquema de los ángulos de Euler.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \mathrm{d}\boldsymbol{R} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}^{'} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{R} + \mathrm{d}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}^{'} \end{aligned}$$

Entonces, para un punto P vale que:

Ecuación Cinemática del Cuerpo Rígido

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_{O'P}$$

Además, vale que $\boldsymbol{\Omega}$ es independiente del sistema de referencia. Consideremos dos puntos P y Q:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{\Omega}_Q \times \boldsymbol{r}_{QP},\ \boldsymbol{r}_{O'P} = \boldsymbol{r}_{O'Q} + \boldsymbol{r}_{QP}$$

$$\begin{aligned} \implies \boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega}_{O'} \times \left(\boldsymbol{r}_{O'Q} + \boldsymbol{r}_{QP}\right) \\ &= \boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{\Omega}_{O'} \times \boldsymbol{r}_{QP} \end{aligned}$$

$$\implies \boldsymbol{\Omega}_Q \times \boldsymbol{r}_{QP} = \boldsymbol{\Omega}_{O'} \times \boldsymbol{r}_{QP}$$

$$\implies \boldsymbol{\Omega}_Q = \boldsymbol{\Omega}_{O'}$$

Ya que esto vale para cualquier punto Q entonces queda demostrado que $\boldsymbol{\Omega}$ no depende del sistema de referencia. Consideremos ahora la energía cinética del cuerpo rígido centrándonos en el centro de masa $O^{'}$:

$$
\begin{aligned}
T &= \int\limits_{\Xi} \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{r}\right) \parallel \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}\right) \parallel^{2} \mathrm{d}^{3}r \\
&= \int\limits_{\Xi} \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right) \parallel \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}^{'} \parallel^{2} \mathrm{d}^{3}r^{'} \\
&= \int\limits_{\Xi} \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right) \left(\parallel \boldsymbol{v}_{CM} \parallel^{2} + 2\boldsymbol{v}_{CM}\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}^{'} + \parallel \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}^{'} \parallel^{2}\right) \mathrm{d}^{3}r^{'} \\
&= \frac{1}{2}M \parallel \boldsymbol{v}_{CM} \parallel^{2} + \boldsymbol{v}_{CM}\cdot\boldsymbol{\Omega}\times \int\limits_{\Xi} \boldsymbol{r}^{'}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right) \mathrm{d}^{3}r^{'} + \int\limits_{\Xi} \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right) \parallel \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}^{'} \parallel^{2} \mathrm{d}^{3}r^{'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{M}\int\limits_{\Xi} \boldsymbol{r}\rho\left(\boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}^{3}r \\
&= \boldsymbol{R} + \frac{1}{M}\int\limits_{\Xi} \boldsymbol{r}^{'}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right) \mathrm{d}^{3}r^{'}
\end{aligned}
$$

$$
\implies \int\limits_{\Xi} \boldsymbol{r}^{'}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right) \mathrm{d}^{3}r^{'} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\parallel \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}^{'} \parallel^{2} &= \Omega^{2}r^{'2}\sin^{2}\left(\theta\right) \\
&= \Omega^{2}r^{'2}\left(1-\cos^{2}\left(\theta\right)\right) \\
&= \Omega^{2}r^{'2}\left(1-\frac{\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}^{'}\right)^{2}}{\Omega^{2}r^{'2}}\right) \\
&= \Omega^{2}r^{'2} - \left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}^{'}\right)^{2} \\
&= \sum_{j,k}\Omega_{j}\Omega_{k}r^{'2}\delta_{jk} - \sum_{j,k}\Omega_{j}\Omega_{k}r_{j}^{'}r_{k}^{'} \\
&= \sum_{j,k}\Omega_{j}\Omega_{k}\left(r^{'2}\delta_{jk} - r_{j}^{'}r_{k}^{'}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\implies T = \frac{1}{2}M \parallel \boldsymbol{v}_{CM} \parallel^{2} + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\Omega_{j}\Omega_{k}\int\limits_{\Xi}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right)\left(r^{'2}\delta_{jk} - r_{j}^{'}r_{k}^{'}\right)\mathrm{d}^{3}r^{'}
$$

Definimos el **Tensor de Inercia** como la matriz $\bar{\bar{I}}$ tal que:

$$
I_{jk} = \int\limits_{\Xi}\rho\left(\boldsymbol{r}^{'}\right)\left(r^{'2}\delta_{jk} - r_{j}^{'}r_{k}^{'}\right)\mathrm{d}^{3}r^{'}
$$

$$
\implies T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^{\dagger}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\boldsymbol{\Omega}
$$

Vale que $\bar{\bar{I}}$ es simétrica, definida positiva y diagonalizable si se toma el sistema de coordenadas adecuado. Además, el **Teorema de Steiner** (que no vamos a demostrar) establece cómo cambia el tensor de inercia si consideremos un sistema de coordenadas cuyo origen es $P \neq O^{'}$:

Teorema de Steiner

$$I_{jk}^{(P)} = MR^2\delta_{jk} - MR_jR_k + I_{jk}^{(O')}$$

Consideremos ahora el momento angular del cuerpo rígido centrándonos en O:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_O &= \int_{\Xi} \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}^3r \\
&= \int_{\Xi} \rho(\boldsymbol{r})\left(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}^{'}\right)\times\left(\boldsymbol{v}_{CM}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}^{'}\right)\mathrm{d}^3r \\
&= \boldsymbol{R}\times M\boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{R}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\underbrace{\int_{\Xi}\boldsymbol{r}^{'}\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r}_{=0}\right) + \underbrace{\int_{\Xi}\boldsymbol{r}^{'}\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r}_{=0}\times\boldsymbol{v}_{CM} + \underbrace{\int_{\Xi}\boldsymbol{r}^{'}\rho(\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r}_{=\boldsymbol{L}_{CM}} \\
&= \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{L}_{CM}
\end{aligned}$$

Llamamos a $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{p}$ el **Momento Angular Orbital** y a $\boldsymbol{L}_{CM}$ lo llamamos **Espín**. Hallemos el espín centrándonos en el centro de masa $O^{'}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_{CM} &= \int_{\Xi} \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}^3r \\
&= \int_{\Xi} \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_{CM}\mathrm{d}^3r + \int_{\Xi}\rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3r \\
&= \underbrace{\int_{\Xi}\rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3r}_{=0}\times\boldsymbol{v}_{CM} + \int_{\Xi}\rho(\boldsymbol{r})\parallel\boldsymbol{r}\parallel^2\boldsymbol{\Omega}_{\perp}\mathrm{d}^3r \\
&= \int_{\Xi}\rho(\boldsymbol{r})\parallel\boldsymbol{r}\parallel^2\left(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}\right)\mathrm{d}^3r \\
&= \int_{\Xi}\rho(\boldsymbol{r})\,r^2\left(\boldsymbol{\Omega}-\frac{\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\mathrm{d}^3r \\
&= \int_{\Xi}\rho(\boldsymbol{r})\left(\boldsymbol{\Omega}r^2-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}^3r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}r^2-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} &= \sum_j\left(\Omega_jr^2-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})\,r_j\right) \\
&= \sum_j\Omega_jr^2-\sum_{j,k}\Omega_kr_kr_j \\
&= \sum_{j,k}\Omega_k\left(r^2\delta_{jk}-r_kr_j\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\implies \boldsymbol{L}_{CM} &= \sum_{j,k} \Omega_k \int_{\Xi} \rho\left(\boldsymbol{r}\right)\left(r^2\delta_{jk} - r_k r_j\right) \mathrm{d}^3 r \\
&= \sum_k \Omega_k I_{jk} \\
&= \bar{\bar{I}} \cdot \boldsymbol{\Omega}
\end{aligned}
$$

Para finalizar consideremos que el cuerpo rígido es sometido a fuerzas conservativas. Por lo tanto, el cuerpo rígido está sometido a un potencial V. Debemos considerar que ya que el cuerpo rígido está rotando entonces podemos tomar como sistema de coordenadas a O pero entonces debemos considerar que el tensor de inercia no es diagonal y varía en el tiempo. Sin embargo, si tomamos el sistema de coordenadas $O^{'}$ con los versores en los ejes principales del cuerpo rígido entonces el tensor de inercia es diagonal y constante pero debemos considerar que estamos en un sistema no inercial y por lo tanto van a aparecer fuerzas inerciales. Tomemos esta última opción ya que es más simple. Por lo tanto:

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) - V
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega_j} = I_j\dot{\Omega}_j
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j} = -\left(I_i - I_k\right)\Omega_i\Omega_k + \tau_j
$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones de Lagrange (4) hallamos que:

Ecuaciones de Euler

$$
\begin{cases}
\tau_1 = I_1\dot{\Omega}_1 + \left(I_3 - I_2\right)\Omega_2\Omega_3 \\
\tau_2 = I_2\dot{\Omega}_2 + \left(I_1 - I_3\right)\Omega_1\Omega_3 \\
\tau_3 = I_3\dot{\Omega}_3 + \left(I_2 - I_1\right)\Omega_1\Omega_2
\end{cases}
$$

Estas son las **Ecuaciones de Euler**.

7. Mecánica Hamiltoniana

7.1. Ecuaciones Canónicas de Hamilton y Transformaciones Canónicas

En la mecánica Lagrangiana trabajamos con coordenadas generalizadas q y $\dot{q}$. Al espacio de estas coordenadas se lo llama el **Espacio de Configuraciones**. En la mecánica Hamiltoniana vamos a trabajar con el **Espacio de Fases** que utiliza las coordenadas q y p. Notemos:

$$
\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{H} &= \sum_j \left(\dot{q}\mathrm{d}p_j + p_j\mathrm{d}\dot{q}_j\right) - \mathrm{d}\mathcal{L} \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{d}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j}\mathrm{d}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)
$$

$$\implies \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\mathrm{d}t = \sum_j \left(\dot{q}_j \mathrm{d}p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \dot{p}_j$ entonces tenemos:

Ecuaciones Canónicas de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}$$

Para la mecánica Hamiltoniana vamos a trabajar con el Hamiltoniano que se relaciona con el Lagrangiano mediante esas ecuaciones. Estas ecuaciones se llaman **Ecuaciones Canónicas de Hamilton**. Notemos que el Hamiltoniano cumple que $\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$.

Consideremos ahora otro cambio de variables. Vamos a considerarlo una transformación canónica con Hamiltoniano $\mathcal{K}$. Ya que la transformación es canónica cumple que:

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P},\ \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q}$$

El objetivo de hacer esto es simplificar las ecuaciones de Hamilton. Ya que el Lagrangiano está definido a menos de una constante podemos tomar a este cambio de variables tal que:

$$\sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{H} = \sum_j \dot{Q}_j P_j - \mathcal{K} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

donde F es una función elegida a conveniencia. Vamos a llamar a esta función la **Función Generatriz**. Hay cuatro funciones generatrices que se pueden usar y que se definen por sus dependencia así: $F_1(q,Q,t)$, $F_2(q,P,t)$, $F_3(Q,P,t)$ y $F_4(p,P,t)$. En base a estas funciones se utilizan transformadas de Legendre de las mismas para simplificar las cuentas, hay cuatro que suelen usarse que son:

$$\begin{cases} F = F_1 \\ F = F_2 - \sum_j Q_j P_j \\ F = F_3 + \sum_j q_j p_j \\ F = F_4 + \sum_j (q_j p_j - Q_j P_j) \end{cases}$$

De cada una de estas transformaciones puede calcularse $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ y pidiendo que se cumpla la igualdad 9 se despejan las coordenadas, que van a quedar en función de las funciones generatrices. Luego uno usa las funciones generatrices que le convengan, algunas que suelen usarse (y que tienen nombre) son:

$$\begin{cases} F_1 = \sum_j q_j Q_j & \text{Transformación de Intercambio} \\ F_2 = \sum_j q_j P_j & \text{Transformación de Identidad} \\ F_2 = \sum_j f_j P_j & \text{Transformación Puntual} \end{cases}$$

En esta última transformación se utilizan funciones f_j independientes de q_j y t.

Veamos el caso de los que se llaman **Transformaciones Infinitesimales**. Tomemos:

$$Q_j = q_j + \delta q_j,\ P_j = p_j + \delta p_j,\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \delta \mathcal{H}$$

Usemos entonces la transformación de identidad de F_2 más un pequeño cambio ϵ:

$$F_2 = \sum_j q_j P_j + \epsilon G,\ F = \sum_j q_j P_j + \epsilon G - \sum_j Q_j P_j$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial P_j}\dot{P}_j + \frac{\partial F}{\partial Q_j}\dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$
$$= \sum_j \left(\left(P_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial q_j} \right)\dot{q}_j + \left(q_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial P_j} - Q_j \right)\dot{P}_j - P_j\dot{Q}_j \right) + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$(9) \implies \sum_j \left(\left(p_j - P_j - \epsilon\frac{\partial G}{\partial q_j} \right)\dot{q}_j - \left(q_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial P_j} - Q_j \right)\dot{P}_j \right) - \left(\mathcal{H} - \mathcal{K} + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t} \right) = 0$$

$$\implies \begin{cases} p_j = P_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial q_j} \\ Q_j = q_j + \epsilon\frac{\partial G}{\partial P_j} \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \delta q_j = \epsilon\frac{\partial G}{\partial P_j} \\ \delta p_j = -\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_j} \\ \delta\mathcal{H} = \epsilon\frac{\partial G}{\partial t} \end{cases}$$

Notemos que entonces si tomamos $G = \mathcal{H}$ y $\epsilon = \mathrm{d}t$ tenemos:

$$\delta q_j = \mathrm{d}q_j,\ \delta p_j = \mathrm{d}p_j,\ \delta\mathcal{H} = \mathrm{d}\mathcal{H}$$

Esto significa que la transformación es un cambio infinitesimal en el tiempo del sistema. Por lo tanto, puede describirse la evolución del sistema como una sucesión de infinitas transformaciones infinitesimales.

7.2. Transformación Simpléctica

Definamos una coordenada ζ_j con $j \in [1, 2n]$ tal que $\zeta_j = q_j$, $\zeta_{n+j} = p_j$. A esta notación la llamamos **Notación Simpléctica**. Tomemos también una matriz $\bar{\bar{J}} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ que esté compuesta por cuatro matrices de $n \times n$ en sus "cuadrantes": la matriz $\bar{\bar{1}}$ en el primer cuadrante, la matriz $\bar{\bar{0}}$ en el segundo y cuarto cuadrante y la matriz $-\bar{\bar{1}}$ en el tercer cuadrante. Esta matriz cumple:

$$\bar{\bar{J}} \cdot \bar{\bar{J}} = -\bar{\bar{1}},\ \bar{\bar{J}}^{-1} = \bar{\bar{J}}^{\dagger} = -\bar{\bar{J}}$$

Usemos ahora el Principio de Hamilton con el Hamiltoniano:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{H} \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum_j \dot{\zeta}_j \zeta_{n+j} - \mathcal{H} \right) \mathrm{d}t$$

$$\delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum_j \dot{\zeta}_j \zeta_{n+j} - \mathcal{H} \right) \mathrm{d}t = 0$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\zeta}_j} \left(\sum_j \dot{\zeta}_j \zeta_{n+j} - \mathcal{H} \right) - \frac{\partial}{\partial\zeta_j} \left(\sum_j \dot{\zeta}_j \zeta_{n+j} - \mathcal{H} \right) = 0$$

Estas son las **Ecuaciones de Hamilton**.

Definimos a una **Matriz Simpléctica** $\bar{\bar{M}}$ como una matriz que cumple la **Condición Simpléctica**:

$$\bar{\bar{M}}^{\dagger} \cdot \bar{\bar{J}} \cdot \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{J}}$$

Notemos:

$$\bar{\bar{J}} \cdot \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{M}}^{\dagger -1} \cdot \bar{\bar{J}}$$

$$\bar{\bar{J}}^{-1} = -\bar{\bar{J}} \implies \bar{\bar{M}} = -\bar{\bar{J}} \cdot \bar{\bar{M}}^{\dagger -1} \cdot \bar{\bar{J}}$$

$$\implies \bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{J}} = \bar{\bar{J}} \cdot \bar{\bar{M}}^{\dagger -1}$$

$$\implies \bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{J}} \cdot \bar{\bar{M}}^{\dagger} = \bar{\bar{J}}$$

El orden de las matrices $\bar{\bar{M}}$ y $\bar{\bar{M}}^{\dagger}$ no afecta. También vale lo siguiente:

$$\det\left(\bar{\bar{M}}\right) \cancel{\det\left(\bar{\bar{J}}\right)} \det\left(\bar{\bar{M}}\right) = \cancel{\det\left(\bar{\bar{J}}\right)}$$

$$\implies \det^2\left(\bar{\bar{M}}\right) = 1$$

No sé de qué sirve saber esto pero bue.

Una propiedad de las transformaciones canónicas es que conservan el volumen del espacio. Es decir, el volumen en el espacio de fases que forman q y p es el mismo que el volumen en el espacio de fases que forman Q y P. Otra cosa que es constante en una trayectoria es la **Invariante Integral de Poincaré**:

$$I = \sum_j \int \mathrm{d}\zeta_j$$

Ya que el volumen en el espacio de fases se conserva eso significa que mientras el número de partículas en el sistema no cambie entonces la densidad de partículas del sistema es invariante frente a transformaciones canónicas. Este es el **Teorema de Liouville**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Veamos ahora el formalismo de los **Corchetes de Poisson**. Sean U y V dos funciones de q_j y p_j se definen los corchetes de Poisson como:

$$[U, V] = \sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial p_j} - \frac{\partial U}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right)$$

Esta nueva operación cumple con las siguientes propiedades:

1. $[q_i, \mathcal{H}] = \dot{q}_i$, $[p_i, \mathcal{H}] = \dot{p}_i$
2. $[q_i, q_k] = [p_i, p_k] = 0$
3. $[q_i, p_k] = -[p_i, q_k] = \delta_{ik}$
4. $[q_i, U] = \frac{\partial U}{\partial p_i}$, $[p_i, U] = \frac{\partial U}{\partial q_i}$
5. $[U(q,p), V(q,p)] = [U(Q,P), V(Q,P)]$
6. $[U, V] = -[V, U]$
7. $[U, U] = 0$

8. $[\alpha U + \beta V, W] = \alpha [U, W] + \beta [V, W]$
9. $[U, [V, W]] = [V, [W, U]] + [W, [U, V]]$
10. $[U, \mathcal{H}] = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial U}{\partial t}$

Los corchetes de Poisson definen un álgebra de Lie, al igual que el producto vectorial y el conmutador de matrices. Notemos que los corchetes de Poisson son una forma directa de hallar constantes de movimiento, ya que si $[\zeta_i, \mathcal{H}] = 0 \implies \zeta_i = \text{cte.}$.

8. Teoría de Hamilton-Jacobi

8.1. La Función Principal de Hamilton

En esta sección vamos a buscarsin alguna transformación que nos lleve de las coordenadas generalizadas a coordenadas que sean constantes de movimiento del sistema. Vamos a considerar $\mathcal{K} = 0$ con una generatriz $F_2 = S$. A esta función la llamamos **Función Principal de Hamilton**. Usando la **Ecuación 9** notemos que:

$$S = \sum_j (q_j P_j - Q_j P_j), \sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{H} = \sum_j \dot{Q}_j P_j + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(P_j \dot{q}_j + (q_j - Q_j) \dot{P}_j - P_j \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\implies p_j = P_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \, Q_j = q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}, \, \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Entonces:

Ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Esta es la **Ecuación de Hamilton-Jacobi**. De esta ecuación pueden despejarse Q y P. Una forma usual de resolver esta ecuación es usando la **Función Característica de Hamilton** $W(q, P)$. Tomemos:

$$S(q, P, t) = W(q, P) - P_1 t$$

$$\implies \frac{\partial S}{\partial t} = -P_1$$

$$\implies \mathcal{H} = P_1$$

Esta función explota el hecho de que el Hamiltoniano es una cantidad conservada y por lo tanto asigna a una de las coordenadas $P_1 = \mathcal{H}$. Como $\dot{P} = \dot{Q} = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

$$\implies S = \int \mathcal{L} \mathrm{d}t$$

La función principal de Hamilton es la acción.

8.2. Variables de Ángulo-Acción

Definimos a la **Variable de Acción y** como $J = \oint p\mathrm{d}q$ y a la **Variable de Ángulo** como $\theta = \frac{\partial W}{\partial J}$. Podemos usar estas variables como coordenadas generalizadas del sistema. Notemos:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \nu,\ \dot{J} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0$$

ν es la frecuencia del sistema. Notemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \oint \frac{\partial \theta}{\partial q}\mathrm{d}q \\
&= \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J}\mathrm{d}q \\
&= \frac{\partial}{\partial J}\oint \frac{\partial W}{\partial q}\mathrm{d}q \\
&= \frac{\partial}{\partial J}\oint p\mathrm{d}q \\
&= \frac{\partial J}{\partial J} \\
&= 1
\end{aligned}$$

9. Relatividad Especial

Definimos (vagamente) un **Sistema Inercial** como un sistema donde valen las leyes de Newton. Cualquier sistema que se mueva a velocidad constante es un sistema inercial. Consideremos dos sistemas inerciales O y $O^{'}$ donde O' se mueve a velocidad $\boldsymbol{v}$ en el sistema O. Entonces:

Transformación de Galileo

$$\boldsymbol{r}^{'} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$$

Esta conversión de un sistema a otro se llama la **Transformación de Galileo**. El **Postulado de Equivalencia** establece que las leyes físicas deben expresarse de igual manera para distintos sistemas inerciales - es decir - las leyes físicas son **Covariantes** frente a transformaciones de coordenadas. En la época de Einstein ya se sabía que la velocidad de la luz era constante para todos los sistemas inerciales lo cual es incompatible con la transformación de Galileo. Los físicos de la época consideraron la posibilidad de que la luz se propague por un medio llamado **Éter** pero nunca pudo demostrarse su existencia. Einstein propuso otra transformación compatible con la covarianza de las ecuaciones de Maxwell.

Busquemos la transformación que sea compatible con:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x^{'2} + y^{'2} + z^{'2} = c^2 t^{'2} \end{cases}$$

Resulta que la transformación compatible es:

Transformación de Lorentz

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}^{'} = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct \\ t^{'} = \gamma t - \frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}$ y $\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Esta transformación se conoce como la **Transformación de Lorentz**. Para simplificar consideremos que la velocidad del sistema $O^{'}$ en O es $v\hat{\boldsymbol{z}}$. Entonces:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma\left(z - vt\right) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right) \end{cases}$$

Minkowski además generalizó el concepto de espacio al **Espacio-Tiempo** usando:

$$(x, y, z, ict) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\implies x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{cte.}$$

Por lo tanto, a las transformaciones de Lorentz las podemos considerar como rotaciones en el espacio-tiempo:

$$\boldsymbol{x}' = \bar{\bar{L}} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$\bar{\bar{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

para $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$. Si no, puede usarse $\boldsymbol{x} = (x, y, z, ct)$ y usar la **Métrica de Minkowski** o **Tensor de Riemann**:

$$\bar{\bar{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se definen los **Vectores Covariantes** y **Vectores Contravariantes** como los vectores con subíndices y supraíndices respectivamente que cumplen que:

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3$$

$$\begin{aligned} \implies x_\nu x^\nu &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= \parallel \boldsymbol{x} \parallel^2 \end{aligned}$$

tomando $\boldsymbol{x} = (ct, x, y, z)$. A un vector x_0 lo llamamos **Suceso**, ya que determina la posición e instante de algo. A la trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo la llamamos **Línea de Universo** y al vector $x_\mu = (ict, x, y, z)$ lo llamamos **Vector Universo**. Definimos también al **Tiempo Propio** como $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$. Esta cantidad es importante ya que es invariante frente a transformaciones de Lorentz. Notemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau^2 &= -\frac{\mathrm{d}x_\mu^2}{c^2} \\ &= -\frac{\mathrm{d}x_\mu'^2}{c^2} \\ &= \mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathrm{d}t^2 \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\implies \mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$$

A este fenómeno se lo llama **Dilatación Temporal**. Un fenómeno similar es el de **Contracción de Longitud** donde $L^{'} = \frac{L}{\gamma}$. Este fenómeno tiene la consecuencia de que eventos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otros.

Definimos al cuadrivector velocidad y densidad de corriente como:

$$U_\mu = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}, ic\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right),\ J_\mu = (J_x, J_y, J_z, ic\rho)$$

$$\frac{\mathrm{d}J_\mu}{\mathrm{d}x_\mu} = 0 \iff \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Se cumple la conservación de carga. Tomemos al potencial electromagnético como $A_\mu = \left(A_x, A_y, A_z, i\frac{V}{c}\right)$ y definamos la **Fuerza de Minkowski** como $K_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(mU_\mu\right)$. Entonces, la fuerza del campo electromagnético es:

$$\begin{aligned}
F_i &= q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}\right) \\
&= q\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(V - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}\right) - \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\frac{q}{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_\mu A_\mu\right) + \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}\tau}\right)
\end{aligned}$$

$$\implies K_\nu = q\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(U_\mu A_\mu\right) - \frac{\mathrm{d}A_\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

$$\implies K_\nu = \gamma F_\nu$$

Tomemos $p_\mu = mU_\mu$ como el cuadrivector momento lineal. Entonces:

$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
K_\mu U_\mu &= U_\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(mU_\mu\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{2}mU_\mu^2\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-\frac{1}{2}mc^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies K_\mu U_\mu &= \gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} + icK_4 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}p_4}{\mathrm{d}\tau} = i\frac{c}{\gamma}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\implies \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\gamma mc^2\right)$$

Como $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ es el trabajo por unidad de tiempo entonces γmc^2 es la energía. Es decir:

$$E = \gamma mc^2$$

Si $v \ll c$:

$$E \approx mc^2 + T$$

si $v = 0$:

$$E = mc^2$$

Esta es la **Energía en Reposo**. Es la energía que un cuerpo tiene aún en reposo. Definimos la energía cinética relativista como:

$$T = \gamma mc^2$$

Por lo tanto, el Lagrangiano relativista es (definido a menos una constante):

$$\mathcal{L} = -\sqrt{1-\beta^2}mc^2 - V$$

Resolvamos las ecuaciones de Lagrange (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \gamma m\dot{q} \\ &= p \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -V^{'}$$

$$\implies \dot{p} + V^{'} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{q}p - \mathcal{L} \\ &= \gamma m\dot{q}^2 + \frac{1}{\gamma}mc^2 + V \\ &= \gamma mc^2 + V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2c^2 + m^2c^4 &= \frac{m^2\dot{q}^2c^2}{1-\beta^2} + m^2c^4 + V \\ &= mc^2\left(\frac{\dot{q}^2}{1-\beta^2} + c^2\right) \\ &= mc^2\left(\gamma^2c^2\right) \\ &= \left(\gamma mc^2\right)^2 \\ &= T^2 \end{aligned}$$

$$\implies T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\implies \mathcal{H} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V$$

Índice alfabético