



<input type="checkbox"/> Completar apellido en las hojas y numerarlas <input type="checkbox"/> Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen <input type="checkbox"/> Justificar <u>todas</u> las respuestas	Nombre y Apellido			
	Yulita Federico			
	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota
	15	30	35	80 (Aprobado)

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A con $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diagonal conteniendo los valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$. Llamemos además u_1, \dots, u_m a las columnas de U y v_1, \dots, v_n a las columnas de V . Se desea encontrar un $x \in \mathbb{R}^n$ ($\|x\|_2 = 1$) que minimiza $\|Ax\|_2$.

- Mostrar que un cambio de variables permite reescribir el problema como: “encontrar un $y \in \mathbb{R}^n$ ($\|y\|_2 = 1$) que minimiza $\|\Sigma y\|_2$ ”. (10 puntos)
- Probar que un y^* que resuelve el problema del ítem (a) es $y^* = e_n$, el n -ésimo vector de la base canónica, es decir: $\min_{y: \|y\|_2=1} \|\Sigma y\|_2 = \|\Sigma e_n\|_2$. (15 puntos)
- Dar una expresión de $x^* \in \mathbb{R}^n$ (es decir, de una solución del problema inicial) y de $\|Ax^*\|_2$ en función de los componentes de la descomposición SVD de A . (10 puntos)

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ con $c \in \mathbb{R}$ y sea $b \in \mathbb{R}^3$.

- Plantear el esquema iterativo de Gauss-Seidel para resolver el sistema $Ax = b$. (10 puntos)
- Hallar $\rho(T_{GS})$, siendo T_{GS} la matriz de iteración de Gauss-Seidel. (8 puntos)
- ¿Para qué valores de c converge? (12 puntos)

3. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y $S = \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ el subespacio generado por el conjunto ortonormal de vectores $q_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$, $m \geq n$.

- Plantear y resolver el problema de cuadrados mínimos que encuentra el elemento en S que se encuentra más cercano a b . (13 puntos)
- Probar usando cuadrados mínimos que si $b \in S^\perp$ entonces 0 es el elemento en S más cercano a b . (12 puntos)
- Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando en cada caso: ‘Si se agrega como elemento generador de S al vector $q_{n+1} = \sum_i^n q_i$, entonces existe un b para el cual el problema de cuadrados mínimos planteado en (a) tiene solución única.’ (10 puntos)

1) (A) Notemos:

$Ax = U \Sigma V^T x$, tomemos $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ una combinación lineal de las columnas de V ya que son base de \mathbb{R}^n

$$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i U \Sigma V^T v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \dots, \sigma_n u_n) \begin{pmatrix} v_1^T v_i \\ v_2^T v_i \\ \vdots \\ v_n^T v_i \end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \sigma_j v_j^T v_i u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \sigma_j \delta_{ij} u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i u_i \checkmark$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

no es una reescritura ni está abstracto por \leq

$$\therefore \|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i u_i \right\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\|_2 = \|x\|_2 = \|y\|_2$$

(B) Si los x son de norma igual a 1, por qué los y y también?

Ya que $\sigma_i \leq \sigma_{i-1} \forall i \geq 2$ entonces sabemos que σ_n es el valor principal más chico. Entonces, como $\|x\|_2 = 1$ tomemos $\alpha_i = \delta_{in}$ que es lo mismo que $y = e_n$

$$\|Ax\|_2 = \|y\|_2 = \|e_n\|_2 = |\sigma_n| \quad \text{No demuestra que esa elección de y minimiza.}$$

(C) Por nuestra elección de y sabemos que $x = Vy$.

Entonces, usando $x^* = Vy^*$ y $y^* = e_n$ tenemos que:

$$x^* = Vy^* = Ve_n = v_n$$

2) ① Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} = D-L-U$$

Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la sucesión de Gauss-Seidel es

$$X^{(k+1)} = \underbrace{(D-L)^{-1}}_{=T} U X^{(k)} + \underbrace{(D-L)^{-1}}_{=c} b. \quad \text{Calculamos } T:$$

$$D-L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

② Calculamos los autovalores de T :

$$\chi(\lambda) = (-1)^{3-1} \lambda (-\lambda c^2) = -\lambda c^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\chi(\lambda) = (-1)^{1+1} (-\lambda) (-\lambda(c^2 - \lambda)) = -\lambda^2(\lambda - c^2) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = c^2 \end{cases} \quad \text{Por lo tanto, } \rho(T) = c^2$$

③ Sabemos que para que la sucesión converja a la solución entonces la matriz debe ser convergente. Entonces, $\rho(T) < 1$.

Por lo tanto, ya que $\rho(T) = c^2$ entonces $-1 < c < 1$.

3) (A) Queremos hallar el vector $y \in \mathbb{R}^m$ más cercano a b , es decir, que minimiza $\|y - b\|_2$, llamémoslo y^* . Ya que los vectores $q_i \in \mathbb{R}^m$ que generan el espacio S forman una base (ya que son ortonormales) entonces podemos expresar a y como una combinación lineal:

$$y = \sum_{i=1}^n x_i q_i, \quad x_i \in \mathbb{R}. \quad \text{Tomemos } A = (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ y } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es $y = Ax$. Entonces, la solución y^* cumple que:

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}} \|Ax - b\|_2, \quad \text{donde } y^* = Ax^*$$

El problema se transforma en el problema de cuadrados mínimos lineales del sistema $Ax = b$. Entonces, usando las ecuaciones normales sabemos que $A^+ Ax^* = A^+ b$. Ya que las columnas de A son ortonormales entonces A es ortogonal, por lo que $A^+ A = I$. Entonces, $x^* = A^+ b$.

(B) Si $b \in S^\perp$ e $y \in S$ entonces por Pitágoras sabemos que:

$$\|y - b\|_2^2 = \|y\|_2^2 + \|b\|_2^2 \geq \|b\|_2^2 \quad (\text{Ya que } y \perp b)$$

Entonces, ya que $\|y - b\|_2 \geq \|b\|_2$ para minimizar esta norma es necesario que $y = 0$, ya que es el único vector que cumple que su norma es nula. Entonces, $y^* = 0$.

(C) Sabemos que existe solución única si y sólo si $\text{Nu}(A) = \{0\}$. Si a A le agregamos la columna q_{n+1} como es una combinación lineal de las otras columnas entonces estas son linealmente dependientes y $\text{Nu}(A) \neq \{0\}$. Entonces, la solución no es única. FALSO.