Ejercicios Resueltos de Métodos Numéricos

Federico Yulita

Primer Cuatrimestre, 2020

Esta materia la cursé con Isabel Méndez Díaz como profesora de las teóricas; en los talleres con Federico Pousa como JTP, Juan Manuel Perez como Ayudante de Primera y Nicolás Mastropasqua y Nicolás San Martín como Ayudantes de Segunda; y en las prácticas con Daniel Acevedo como JTP, Nestor Masnatta como Ayudante de Primera y Gustavo Hurovich y Gian Franco Lancioni como Ayudantes de Segunda. Si querés ver el resto de mis apuntes los podés encontrar en mi blog. Los ejercicios con un asterisco (*) son los que resolvimos en clase.

Índice

1. Guía 1: Elementos de Álgebra Lineal

1.1. Ejercicio 5

Tomemos $a_i, b_j \in \mathbb{R}^n$ con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \\ \vdots \\ a_m^\dagger \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1^\dagger b_1 & a_1^\dagger b_2 & \ldots & a_1^\dagger b_r \\ a_2^\dagger b_1 & a_2^\dagger b_2 & \ldots & a_2^\dagger b_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^\dagger b_1 & a_m^\dagger b_2 & \ldots & a_m^\dagger b_r \end{pmatrix}$$

Si $A \cdot B = 0$ entonces todos los elementos de la matriz $A \cdot B$ deben ser nulos. Por lo tanto, $a_i^\dagger b_j = 0 \, \forall i, j$. Si para cierto i y j tenemos que $a_i^\dagger b_j$ eso significa que a_i y b_j son vectores linealmente independientes. Entonces, para que el producto $A \cdot B$ sea nulo queremos que todas las filas de A sean linealmente independientes a todas las columnas de B. Esto no es lo mismo que alguna de las matrices sea nula. Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = 0$$

En este ejemplo es fácil de ver que $a_i^\dagger b_j = 0 \, \forall i, j$ y que $A \neq 0$ y $B \neq 0$.

Sin embargo, si las matrices A o B fueran inversibles entonces si sería cierto que una de las dos debe ser nula, ya que si A fuera inversible tenemos:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 0 \\ A^{-1} \cdot A \cdot B &= 0 \\ \mathbb{I} \cdot B &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

y lo mismo si B fuera inversible.

1.2. Ejercicio 7

Notemos:

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A^2 + 2AB + B^2 - [A, B] \end{aligned}$$

Entonces, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff [A, B] = 0$. Ahora veamos el otro caso:

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= A^2 - AB + BA - B^2 \\ &= A^2 - B^2 - [A, B] \end{aligned}$$

Entonces, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \iff [A, B] = 0$.

1.3. Ejercicio 17

Tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}\\&\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tomemos:

$$v=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore Av&=\lambda\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\&=\lambda\begin{pmatrix}14\\10\\19\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\3\\7\\1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}3\\2\\4\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Como estos vectores son L.I. entonces:

$$\therefore \operatorname{Im}(A)=\langle(14,10,19,3),(5,3,7,1),(3,2,4,1)\rangle$$

Para hallar el núcleo notemos:

$$Ax=0$$

$$\therefore\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&1&2&0\\1&3&4&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore \operatorname{Nu}(A) = \{0\}$$

Notemos que $n = 3$, $\dim(\operatorname{Im}(A)) = 3$ y $\dim(\operatorname{Nu}(A)) = 0$. Por lo tanto, se comprueba que $n = \dim(\operatorname{Im}(A)) + \dim(\operatorname{Nu}(A))$. Es fácil ver que el $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Ahora tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces tomemos:

$$v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore Av &= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{Im}(A) = \langle (3, 12, 36), (6, 10, 36) \rangle$$

Para hallar el núcleo notemos:

$$Ax = 0$$

$$\therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 30 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\therefore \operatorname{Nu}(A) = \langle (4, -5, 1) \rangle$$

Notemos que $n = 3$, $\dim(\operatorname{Im}(A)) = 2$ y $\dim(\operatorname{Nu}(A)) = 1$, así que se cumple que $n = \dim(\operatorname{Im}(A)) + \dim(\operatorname{Nu}(A))$. Es fácil ver que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

1.4. Ejercicio 18

1.4.1. (a)

$y \in \mathrm{Im}\,(A) \iff \exists x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = y$. Entonces, $\mathrm{Im}\,(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = y\}$. Notemos:

$$\begin{aligned} Ax &= u \underbrace{v^\dagger x}_{=\lambda \in \mathbb{R}} \\ &= \lambda u \\ &= y \end{aligned}$$

Entonces, vemos que los elementos de la imagen de A son múltiplos del vector u. Entonces, $\mathrm{Im}\,(A) = \langle u \rangle$. Por el teorema de la dimensión sabemos que $n = \dim(\mathrm{Im}\,(A)) + \dim(\mathrm{Nu}\,(A))$. Como $\dim(\mathrm{Im}\,(A)) = 1$ entonces $\dim(\mathrm{Nu}\,(A)) = n - 1$.

1.4.2. (b)

Notemos:

$$\begin{aligned} A^2 &= u \underbrace{v^\dagger u}_{=\lambda \in \mathbb{R}} v^\dagger \\ &= \lambda u v^\dagger \\ &= \lambda A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \end{aligned}$$

Entonces, es fácil de ver que $\lambda = \mathrm{Tr}\,(A)$ y, por lo tanto, $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)\, A$.

1.5. Ejercicio 19

1.5.1. (a)

$\mathrm{Nu}\,(B) \subseteq \mathrm{Nu}\,(AB) \iff \forall x \in \mathrm{Nu}\,(B) \implies x \in \mathrm{Nu}\,(AB)$. Notemos que $x \in \mathrm{Nu}\,(B) \iff Bx = 0$. Es trivial entonces que $ABx = 0$.

1.5.2. (b)

$\mathrm{Im}\,(AB) \subseteq \mathrm{Im}\,(A) \iff \forall x \in \mathrm{Im}\,(AB) \implies x \in \mathrm{Im}\,(A)$. Notemos que $x \in \mathrm{Im}\,(AB) \iff \exists v \in \mathbb{R}^n \,/\, ABv = x$. Tomemos $y = Bv \in \mathbb{R}^n$ y entonces $Ay = x$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{Im}\,(A)$.

1.5.3. (c)

$\mathrm{Im}\,(B) \subseteq \mathrm{Nu}\,(A) \iff \forall x \in \mathrm{Im}\,(B) \implies x \in \mathrm{Nu}\,(A)$. Notemos que $x \in \mathrm{Im}\,(B) \iff \exists v \in \mathbb{R}^n \,/\, Bv = x$. Notemos:

$$\begin{aligned} ABv &= Ax \\ \underset{AB=0\,\rightarrow}{} &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $x \in \mathrm{Nu}\,(A)$.

1.6. Ejercicio 21

(a) $\implies$ (b) Notemos:

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ A^{-1}Ax &= 0 \\ \mathbb{I}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, asumimos que $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Entonces, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\implies \nexists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0 \,/\, Ax = 0$.

(b) $\implies$ (c) Notemos que $Ax = 0 \iff x^\dagger A^\dagger = 0$. Tomemos $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

y tomemos $x_i \in \mathbb{R}$ tales que:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x^\dagger A^\dagger &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \\ \vdots \\ a_n^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_i^\dagger \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, los vectores $a_i^\dagger$ deben ser linealmente independientes entre sí. Como a_i son las columnas de A entonces $\nexists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0 \,/\, Ax = 0 \implies$ Las columnas de A son linealmente independientes.

(c) $\implies$ (d) Tomemos $f_i, c_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix} \wedge A = \begin{pmatrix} f_1^\dagger \\ f_2^\dagger \\ \vdots \\ f_n^\dagger \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$\nexists \alpha_i \in \mathbb{R},\, \alpha_i \neq 0 \,/\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 0$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i^\dagger = 0 \\
&\equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^\dagger \\ c_2^\dagger \\ \vdots \\ c_n^\dagger \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \\
&\equiv A\alpha = 0
\end{aligned}$$

donde:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
A\alpha &= \begin{pmatrix} f_1^\dagger \\ f_2^\dagger \\ \vdots \\ f_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^\dagger
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$$

Por lo tanto, las columnas de A son linealmente independientes $\implies$ las filas de A son linealmente independientes.

(d) $\implies$ (a) Sabemos que las filas de A son linealmente independientes. Entonces, las filas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\forall b \in \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = b$, ya que podemos triangular la matriz A para hallar el vector x. Tomemos $c_i \in \mathbb{R}^n$ tales que $Ac_i = e_i$, donde e_i son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Entonces, podemos armarnos la matriz inversa A^{-1} usando que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

y entonces $AA^{-1} = \mathbb{I}$. Es fácil ver que entonces $A^{-1}A = \mathbb{I}$. Entonces, las filas de A son linealmente independientes $\implies A$ es inversible.

1.7. Ejercicio 24

1.7.1. (a)

Consideremos dos matrices triangulares superiores $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, AB es triangular superior. Ahora supongamos que dos matrices triangulares superiores $A_n, B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cumplen que el producto AB es triangular superior. Entonces, agreguémosle a cada matriz una fila $0 \in \mathbb{R}^n$, una columna $a, b \in \mathbb{R}^n$ y un elemento más a la diagonal $a_{n+1n+1}, b_{n+1n+1} \in \mathbb{R}$ para que sea triangular superior. Entonces:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & a \\ 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}, \ B_{n+1} = \begin{pmatrix} B_n & b \\ 0 & b_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} A_{n+1}B_{n+1} &= \begin{pmatrix} A_n & a \\ 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n & b \\ 0 & b_{n+1n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_nB_n + ab & A_nb + b_{n+1n+1}a \\ 0 & a_{n+1n+1}b_{n+1n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A_{n+1}B_{n+1}$ es triangular superior. Entonces, por inducción demostramos que el producto de matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. Análogamente se puede demostrar lo mismo para matrices triangulares inferiores. Es evidente, ya que la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior y la transpuesta solo invierte el orden de la multiplicación, no la modifica de otra manera.

1.7.2. (b)

Consideremos una matriz triangular superior $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos que para una matriz $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior existe su inversa $A_n^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que también es triangular superior. Entonces, agreguémosle una fila $0 \in \mathbb{R}^n$, una columna $a \in \mathbb{R}^n$ y un elemento más a la diagonal $a_{n+1n+1} \in \mathbb{R}$ oara que sea triangular superior de la forma:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & a \\ 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

Entonces, la inversa de A_{n+1} es:

$$A_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} A_n^{-1} & -\frac{1}{a_{n+1n+1}} a A_n^{-1} \\ 0 & \frac{1}{a_{n+1n+1}} \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} A_{n+1}A_{n+1}^{-1} &= \begin{pmatrix} A_n & a \\ 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{-1} & -\frac{1}{a_{n+1n+1}} A_n^{-1} a \\ 0 & \frac{1}{a_{n+1n+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_n A_n^{-1} & -\frac{1}{a_{n+1n+1}} A_n A_n^{-1} a + \frac{1}{a_{n+1n+1}} a \\ 0 & \frac{a_{n+1n+1}}{a_{n+1n+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{-1}A_{n+1} &= \begin{pmatrix} A_n^{-1} & -\frac{1}{a_{n+1n+1}} A_n^{-1} a \\ 0 & \frac{1}{a_{n+1n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & a \\ 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_n^{-1} A_n & A_n^{-1} a - \frac{a_{n+1n+1}}{a_{n+1n+1}} A_n^{-1} a \\ 0 & \frac{a_{n+1n+1}}{a_{n+1n+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Entonces, por inducción demostramos que la inversa de una matriz triangular superior es otra matriz triangular superior. Análogamente se puede demostrar lo mismo para matrices triangulares inferiores. Es evidente, ya que la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior y la inversa de la matriz transpuesta es la transpuesta de la matriz inversa - es decir - $\left(A^\dagger\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\dagger$.

2. Guía 2: Eliminación Guassiana, Factorización, Normas y Número de Condición

2.1. Ejercicio 1

2.1.1. (a)

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{12} & \frac{9}{112} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & \frac{1}{120} & \frac{9}{700} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2800} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.1.2. (b)

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.500 & 0.333 & 0.250 & 0.200 \\ 0.333 & 0.250 & 0.200 & 0.167 \\ 0.250 & 0.200 & 0.167 & 0.143 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.000 & 0.083 & 0.084 & 0.075 \\ 0.000 & 0.084 & 0.089 & 0.084 \\ 0.000 & 0.075 & 0.084 & 0.081 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.000 & 0.083 & 0.084 & 0.075 \\ 0.000 & 0.000 & 0.004 & 0.008 \\ 0.000 & 0.000 & 0.008 & 0.013 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.000 & 0.083 & 0.084 & 0.075 \\ 0.000 & 0.000 & 0.004 & 0.008 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.003 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2800} \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.000 & 0.083 & 0.083 & 0.075 \\ 0.000 & 0.000 & 0.006 & 0.008 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.000 & 0.083 & 0.084 & 0.075 \\ 0.000 & 0.000 & 0.004 & 0.008 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.003 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.2. Ejercicio 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 10 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 44 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 190 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 24 & 60 & 42 \\ 0 & 14 & 78 & 252 & 188 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 18 \\ 0 & 0 & 36 & 168 & 132 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 24 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 - 2y - 3z - 4w \\ y = 4 - 3z - 6w \\ z = 3 - 4w \\ w = 1 \end{cases}$$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}}_{=A}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} A$$

Entonces, la factorización LU de A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Hallemos la inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -6 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -5 & -11 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}}_{=U}$$

Ahora calculemos el determinante:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(LU) \\ &= \det(L)\det(U) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \\ &= 2(1-0)(6\cdot 24 - 0) \\ &= 2 \cdot 144 \\ &= 288 \end{aligned}$$

Notemos que el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal de U. Esto es porque el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal y la matriz L siempre tiene 1's en la diagonal.

2.3. Ejercicio 4

2.3.1. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 14 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

Tomemos:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 14 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_{21} - \frac{2}{4}x_{31} & -\frac{1}{4}x_{22} - \frac{2}{4}x_{32} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_{23} - \frac{2}{4}x_{33} \\ -\frac{10}{7}x_{31} & \frac{4}{7} - \frac{10}{7}x_{32} & -\frac{1}{7} - \frac{10}{7}x_{33} \\ \frac{14}{4} & -\frac{4}{4} & -\frac{6}{4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_{21} - \frac{7}{4} & -\frac{1}{4}x_{22} + \frac{2}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_{32} + \frac{3}{4} \\ -5 & 2 & 2 \\ \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 2 \\ \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 2 \\ \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2.3.2. (b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\therefore A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=L^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{=U}$$

No necesitamos calcular L a partir de L^{-1} para hallar la inversa de A, pero el inciso lo pide así que hagámoslo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 1 & 0 & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la factorización LU de A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora, para hallar la inversa de A usamos que $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$. Entonces, debemos hallar L^{-1} y U^{-1}. L^{-1} ya lo vimos:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Hallemos U^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\therefore U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 2 \\ \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3.3. (c)

La factorización LU de A ya la calculamos en el inciso anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Tomemos entonces tres vectores x_1, x_2 y x_3 tales que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Entonces, $Ax_i = e_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, donde e_i son los vectores canónicos. Hallemos x_i usando la factorización LU de A:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_{1i} + x_{2i} + 2x_{3i} \\ \frac{3}{2}x_{2i} + 2x_{3i} \\ -\frac{2}{3}x_{3i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_{1i} + x_{2i} + 2x_{3i} \\ x_{1i} + 2x_{2i} + 3x_{3i} \\ 4x_{1i} + x_{2i} + 2x_{3i} \end{pmatrix} \\ &= e_i \end{aligned}$$

No entiendo exactamente cómo quiere el ejercicio que resuelva esto usando la factorización LU, porque acá terminé multiplicando explícitamente a L y a U para despues resolver el sistema de A por columnas...

2.4. Ejercicio 6

2.4.1. (a)

Queremos hallar una matriz M_k que triangule la k-ésima columna de $A^{(k-1)}$, que tiene las primeras $k-1$ columnas ya trianguladas. Sabemos que M_k debe ser una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal, así que tomemos $M_k = \mathbb{I} - \tilde{M}_k$. Consideremos $n = 3$ y $k = 1$ por un momento:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{I} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{I} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} - \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \tilde{a}_{23} \end{pmatrix}$$

$$\therefore M_1 = \mathbb{I} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El problema es que debemos averiguar los valores de $\tilde{a}_{ij}$. En general, tendremos:

$$M_k = \mathbb{I} - m^{(k)} e_k^\dagger$$

donde:

$$m_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & i \leqslant k \\ \frac{\tilde{a}_{ik}}{\tilde{a}_{kk}} & i > k \end{cases}$$

2.4.2. (b)

Notemos:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= M_k A^{(k-1)} \\ \det\left(A^{(k)}\right) &= \det\left(M_k\right) \det\left(A^{(k-1)}\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

M_k es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal, así que sabemos que es no singular (ya que no tiene ningún 0 en la diagonal). Se puede hacer lo mismo en la dirección opuesta, ya que M_k es no singular así que puede tomarse la inversa para invertir la igualdad. Por lo tanto, $\exists k_0 \,/\, \det\left(A^{(k_0)}\right) \neq 0 \iff \det\left(A^{(k)}\right) \neq 0 \, \forall k$.

2.5. Ejercicio 7

Tomemos $A_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ como la submatriz de A compuesta por las primeras i filas y columnas. Usemos inducción para demostrar que si una matriz A_i tiene factorización LU entonces la matriz A_{i+1} también tiene factorización LU.

$i = 1$ Tenemos:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

con $A_1 = a_{11} \neq 0$. Entonces, la factorización LU de A_2 es:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{pmatrix}$$

$i \implies i+1$ Tomemos $v, w \in \mathbb{R}^i$ tales que:

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} A_i & v \\ w^\dagger & a_{(i+1)(i+1)} \end{pmatrix}$$

Propongamos:

$$L = \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_i & x \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} LU &= \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ l^\dagger & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i & u \\ 0 & u_{(i+1)(i+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_i U_i & L_i u \\ l^\dagger U_i & l^\dagger u + u_{(i+1)(i+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_i & v \\ w^\dagger & a_{(i+1)(i+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} A_i = L_i U_i & v = L_i u \\ w^\dagger = l^\dagger U_i & a_{(i+1)(i+1)} = l^\dagger u + u_{(i+1)(i+1)} \end{cases}$$

Como A_i tiene factorización LU entonces L_i y U_i deben ser la factorización LU de A. Entonces:

$$\begin{cases} u = L_i^{-1} v \\ l^\dagger = w^\dagger U_i^{-1} \\ u_{(i+1)(i+1)} = a_{(i+1)(i+1)} - l^\dagger u \end{cases}$$

Como L_i y U_i provienen de la factorización LU de A_i entonces existen L_i^{-1} y U_i^{-1}.

2.6. Ejercicio 14

2.6.1. (a)

Consideremos un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que en las posición i se encuentra el máximo elemento en módulo - es decir - $\max\limits_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} (|x_j|) = |x_i|$. Entonces:

$$\begin{aligned} \| x \|_\infty &= \max_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} (|x_j|) \\ &= |x_i| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} |x_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ &= \| x \|_1 \end{aligned}$$

2.6.2. (b)

$$\begin{aligned}
\| x \|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_i| \\
&= n \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|x_j|) \\
&= n \| x \|_\infty
\end{aligned}$$

2.6.3. (c)

$$\begin{aligned}
\| x \|_\infty &= \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|x_j|) \\
&= |x_i| \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x_j^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \\
&= \| x \|_2
\end{aligned}$$

2.7. Ejercicio 16

Sea f alguna norma vectorial entonces la norma matricial inducida por f de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es:

$$\| A \| = \max_{x\in\mathbb{R}^n / f(x)=1} (f(Ax))$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathbb{R}^n / f(x)=1} (f(Ax)) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n / f(x)=1} (f(Ax)) \\
f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1\,\forall x \neq 0 \rightarrow &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n / x\neq 0} \left(f\left(A\frac{x}{f(x)}\right)\right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n / x\neq 0} \left(\frac{f(Ax)}{|f(x)|}\right) \\
f(x) > 0\,\forall x \neq 0 \rightarrow &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n / x\neq 0} \left(\frac{f(Ax)}{f(x)}\right)
\end{aligned}$$

2.7.1. (a)

$\| A \| > 0\,\forall A \neq 0 \wedge \| A \| = 0 \iff A = 0$ Consideremos todos los $x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) = 1$. Como f es una norma vectorial entonces $x \neq 0$. Entonces, $Ax = 0 \iff A = 0 \vee x \in \mathrm{Nu}(A)$. Como estamos considerando todos los x de norma 1 entonces no pueden pertenecer todos al núcleo de A, ya que juntos forman una base de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $Ax = 0 \iff A = 0$. Equivalentemente:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(Ax)) = 0 \iff A = 0$$

$$\therefore \| A \| = 0 \iff A = 0$$

Consideremos ahora $A \neq 0$. Sabemos entonces que $\| A \| \neq 0$. Supongamos que la j-ésima columna de A, a_j, es no nula. Entonces, tomemos $x = e_j$. Notemos:

$$\begin{aligned}
\| A \| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n \wedge x\neq 0} \left(\frac{f(Ax)}{f(x)}\right) \\
&\geqslant \frac{(f(Ae_j))}{f(e_j)} \\
&= \frac{f(a_j)}{f(e_j)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$\| \lambda A \| = |\lambda| \; \| A \| \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\| \lambda A \| &= \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(\lambda Ax)) \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (|\lambda| f(Ax)) \\
&= |\lambda| \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(Ax)) \\
&= |\lambda| \; \| A \|
\end{aligned}$$

$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \| \;\; \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned}
\| A + B \| &= \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f((A+B)x)) \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(Ax + Bx)) \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(Ax) + f(Bx)) \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(Ax)) + \max_{x\in\mathbb{R}^n/f(x)=1} (f(Bx)) \\
&= \| A \| + \| B \|
\end{aligned}$$

2.8. Ejercicio 18

2.8.1. (a)

$\| A \|_M > 0 \, \forall A \neq 0 \wedge \| A \|_M = 0 \iff A = 0$ Es bastante trivial. Como $\| A \|_M$ es el mayor elemento en módulo de la matriz entonces es 0 sólo si $A = 0$ y si $A \neq 0$ siempre es positivo ya que tomamos el módulo.

$\| \lambda A \|_M = |\lambda| \; \| A \|_M \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\| \lambda A \|_M &= \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|\lambda a_{ij}|) \\
&= |\lambda| \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|a_{ij}|) \\
&= |\lambda| \; \| A \|_M
\end{aligned}$$

$\parallel A+B \parallel_M \leqslant \parallel A \parallel_M + \parallel B \parallel_M \ \forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned}
\parallel A+B \parallel_M &= \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|a_{ij}+b_{ij}|) \\
&\leqslant \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) \\
&\leqslant \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|a_{ij}|) + \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|b_{ij}|) \\
&= \parallel A \parallel_M + \parallel B \parallel_M
\end{aligned}$$

2.8.2. (b)

Sin pérdida de generalidad tomemos el elemento a_{lm} tal que $|a_{lm}| = \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|a_{ij}|)$. Notemos:

$$\begin{aligned}
\parallel A \parallel_M &= |a_{lm}| \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{lj}\delta_{jm})^2}
\end{aligned}$$

Tomemos $a_j \in \mathbb{R}^n$ las filas de A. Entonces:

$$\begin{aligned}
\parallel A \parallel_M &= \sqrt{\left(a_l^\dagger e_m\right)^2} \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{\left(a_l^\dagger x\right)^2} \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^\dagger x\right)^2} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \parallel Ax \parallel_2 \\
&= \parallel A \parallel_2
\end{aligned}$$

Entonces, $\parallel A \parallel_M \leqslant \parallel A \parallel_2$.

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\parallel A \parallel_2 &= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \parallel Ax \parallel_2 \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^\dagger x\right)^2} \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_l^\dagger x\right)^2} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{n\left(a_l^\dagger x\right)^2} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j\right)^2} \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} \sqrt{n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{lm}x_j\right)^2} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} |a_{lm}| \sqrt{n\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2} \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} |a_{lm}| \sqrt{n\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|_2=1} |a_{lm}| \sqrt{n \parallel x \parallel_2^2} \\
\parallel x \parallel_2 = 1 \rightarrow &= \sqrt{n}\,|a_{lm}| \\
n \geqslant 1 \rightarrow &\leqslant n\,|a_{lm}| \\
&= n \max_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}} (|a_{ij}|) \\
&= n \parallel A \parallel_M
\end{aligned}
$$

Entonces $\parallel A \parallel_M \leqslant \parallel A \parallel_2 \leqslant n \parallel A \parallel_M$.

2.9. Ejercicio 19

2.9.1. (a)

$$
\begin{aligned}
\kappa(\mathbb{I}) &= \parallel \mathbb{I} \parallel \parallel \mathbb{I}^{-1} \parallel \\
&= \parallel \mathbb{I} \parallel \parallel \mathbb{I} \parallel \\
&= \parallel \mathbb{I} \parallel^2 \\
&\geqslant 1
\end{aligned}
$$

2.9.2. (b)

$$\begin{aligned}\kappa(AB) &= \| AB \| \| (AB)^{-1} \| \\ &= \| AB \| \| B^{-1}A^{-1} \| \\ &\leqslant \| A \| \| B \| \| B^{-1} \| \| A^{-1} \| \\ &= \kappa(A)\,\kappa(B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha A) &= \| \alpha A \| \| (\alpha A)^{-1} \| \\ &= \| \alpha A \| \| \frac{1}{\alpha} A^{-1} \| \\ &= |\alpha| \| A \| \frac{1}{|\alpha|} \| A^{-1} \| \\ &= \kappa(A)\end{aligned}$$

2.10. Ejercicio 20

2.10.1. (a)

Tenemos que $Ax = b$ y $A\delta x = \delta b$ y queremos acotar la norma de δx. Notemos:

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\begin{aligned}\therefore \| \delta x \| &= \| A^{-1}\delta b \| \\ &\leqslant \| A^{-1} \| \| \delta b \| \\ &= \frac{\| Ax \|}{\| Ax \|} \| A^{-1} \| \| \delta b \| \\ &= \frac{\| Ax \|}{\| b \|} \| A^{-1} \| \| \delta b \| \\ &\leqslant \| A \| \| x \| \| A^{-1} \| \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} \\ &= \kappa(A) \| x \| \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}\end{aligned}$$

Entonces, $\| \delta x \| \leqslant \| A^{-1} \| \| \delta b \| \leqslant \kappa(A) \| x \| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

2.10.2. (b)

Ahora tenemos que $Ax = b$ y que $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$. Notemos:

$$\begin{aligned}(A + \delta A)(x + \delta x) &= Ax + A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x \\ &= b + A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x \\ &= b\end{aligned}$$

$$\therefore A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x = 0$$

Entonces:

$$\delta x = -\left(A + \delta A\right)^{-1} \delta A x$$

$$\begin{aligned}
\therefore \| \delta x \| &= \| \left(A + \delta A\right)^{-1} \delta A x \| \\
&\leqslant \| \left(A + \delta A\right)^{-1} \| \| \delta A \| \| x \|
\end{aligned}$$

3. Guía 3: Matrices Simétricas Definidas Positivas y Factorización de Cholesky

3.1. Ejercicio 1

Notemos:

$$\begin{aligned}
\left[AA^{\dagger}\right]_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{jk} a_{ki} \\
&= \left[AA^{\dagger}\right]_{ji}
\end{aligned}$$

$$\therefore AA^{\dagger} = \left(AA^{\dagger}\right)^{\dagger}$$

$$\begin{aligned}
\left[A^{\dagger}A\right]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} a_{ki} \\
&= \left[A^{\dagger}A\right]_{ji}
\end{aligned}$$

$$\therefore A^{\dagger}A = \left(A^{\dagger}A\right)^{\dagger}$$

Notemos que el límite de la suma es distinto así que las matrices pueden ser distintas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
AA^{\dagger} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^\dagger A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix} \implies AA^\dagger \neq A^\dagger A
$$

Tomemos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\left[A + A^\dagger\right]_{ij} &= a_{ij} + a_{ji} \\
&= a_{ji} + a_{ij} \\
&= \left[A + A^\dagger\right]_{ji}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore A + A^\dagger = \left(A + A^\dagger\right)^\dagger
$$

$$
\begin{aligned}
\left[A - A^\dagger\right]_{ij} &= a_{ij} - a_{ji} \\
&= -\left(a_{ij} - a_{ji}\right) \\
&= -\left[A + A^\dagger\right]_{ji}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore A - A^\dagger = -\left(A - A^\dagger\right)^\dagger
$$

La matriz $A - A^\dagger$ es antisimétrica.

3.2. Ejercicio 6

$$
\begin{aligned}
x^\dagger A x &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 a + x_2 b & x_1 b + x_2 c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 a + x_1 x_2 b + x_1 x_2 b + x_2^2 c \\
&= x_1^2 a + 2x_1 x_2 b + x_2^2 c \\
&> 0 \, \forall x \neq 0
\end{aligned}
$$

3.2.1. (a)

Consideremos $a = 0$. Entonces, $2x_1x_2b + x_2^2c > 0\,\forall x \neq 0$. Notemos que si $x_2 = 0$ y $x_1 \neq 0$ esta condición no se cumple. Por lo tanto, $a \neq 0$. Ahora consideremos $a < 0$ y tomemos $\tilde{a} = -a$ tal que $\tilde{a} > 0$. Entonces, $-x_1^2\tilde{a} + 2x_1x_2b + x_2^2c > 0\,\forall x \neq 0$. Notemos que si $x_2 = 0$ y $x_1 \neq 0$ esta condición no se cumple. Por lo tanto, $a > 0$.

3.2.2. (b)

Consideremos $c = 0$. Entonces, $x_1^2a + 2x_1x_2b > 0\,\forall x \neq 0$. Notemos que si $x_1 = 0$ y $x_2 \neq 0$ esta condición no se cumple. Por lo tanto, $c \neq 0$. Ahora consideremos $c < 0$ y tomemos $\tilde{c} = -c$ tal que $\tilde{c} > 0$. Entonces, $x_1^2a + 2x_1x_2b - x_2^2\tilde{c} > 0\,\forall x \neq 0$. Notemos que si $x_1 = 0$ y $x_2 \neq 0$ esta condición no se cumple. Por lo tanto, $c > 0$.

3.2.3. (c)

Notemos:

$$\begin{aligned} x_1 = -b \wedge x_2 = a \implies b^2 a - 2b^2 a + a^2 c &= a\left(ac - b^2\right) \\ &= a \det(A) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Vimos que $a > 0$ así que $\det(A) > 0$.

3.2.4. (d)

Consideremos $b \geqslant \frac{a+c}{2}$. Notemos:

$$x_1 = 1 \wedge x_2 = -1 \implies a - 2b + c > 0$$

$$\therefore \frac{a+c}{2} \leqslant b < \frac{a+c}{2}$$

Por lo tanto, $b \ngeqslant \frac{a+c}{2}$. Ahora consideremos $b \leqslant -\frac{a+c}{2}$. Notemos:

$$x_1 = 1 \wedge x_2 = 1 \implies a + 2b + c > 0$$

$$\therefore -\frac{a+c}{2} \geqslant b > -\frac{a+c}{2}$$

Por lo tanto, $|b| < \frac{a+c}{2}$.

3.3. Ejercicio 7

$$\begin{aligned} x^\dagger A x &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} x_j \\ A = A^\dagger \rightarrow &= 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \left(2 - \delta_{ij}\right) x_i a_{ij} x_j \\ &> 0 \end{aligned}$$

3.3.1. (a)

Consideremos $x = e_i$. Entonces:

$$\begin{aligned} e_i^\dagger A e_i &= a_{ii} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{ii} > 0 \, \forall i$$

3.3.2. (b)

Supongamos que A es singular. Entonces, $\exists x \neq 0 \,/\, Ax = 0$. Por lo tanto, $x^\dagger A x = 0 \not> 0$. Demostramos entonces que si A es singular entonces A no es definida positiva. Por lo tanto, usando la sentencia contrapositiva tenemos que si A es definida positiva entonces es no singular.

3.3.3. (c)

Tomemos $A_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ como la submatriz compuesta por las primeras i filas y columnas de A. Entonces, tomemos un vector $x \in \mathbb{R}^n$ cuyos $x_j \in \mathbb{R}$ si $j \leqslant i$ y $x_j = 0$ si $j > i$. Tomemos $x_i \in \mathbb{R}^i$ como el subvector de x tal que:

$$x = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

También, tomemos $B_i \in \mathbb{R}^{i\times(n-i)}$, $C_i \in \mathbb{R}^{(n-i)\times i}$ y $D_i \in \mathbb{R}^{(n-i)\times(n-i)}$ tales que:

$$A = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} x^\dagger A x &= \begin{pmatrix} x_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_i^\dagger A_i & x_i^\dagger B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x_i^\dagger A_i x_i \\ &> 0 \,\forall x_i \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, A_i es definida positiva.

3.3.4. (d)

Sabemos que $a_{ii}a_{jj} \geqslant a_{ij}^2 \,\forall i, j$. Supongamos que $a_{lm} \neq 0$ es el mayor elemento en módulo de A - es decir - $|a_{lm}| \geqslant |a_{ij}| \;\forall i, j$. Notemos:

$$a_{ll}a_{mm} \geqslant a_{lm}^2$$

$$\therefore |a_{ll}|\,|a_{mm}| \geqslant |a_{lm}|^2$$

Sin pérdida de generalidad tomemos $|a_{ll}| \geqslant |a_{mm}|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |a_{ll}| &\geqslant \frac{|a_{lm}|^2}{|a_{mm}|} \\ &\geqslant |a_{lm}| \end{aligned}$$

Como $|a_{lm}| \geqslant |a_{ij}| \;\forall i, j$ entonces $|a_{lm}| = |a_{ll}| = |a_{mm}|$. Por lo tanto, el mayor elemento en módulo de A pertenece a la diagonal.

3.4. Ejercicio 12

3.4.1. (a)

$$\begin{aligned} x^\dagger A^\dagger x &= \left(x^\dagger A^\dagger x\right)^\dagger \\ &= \left(A^\dagger x\right)^\dagger x \\ &= x^\dagger A x \end{aligned}$$

$$\therefore x^\dagger A^\dagger x > 0 \,\forall x \neq 0 \iff x^\dagger A x > 0 \,\forall x \neq 0$$

3.4.2. (b)

$$x^\dagger\left(\frac{A+A^\dagger}{2}\right)x = \frac{1}{2}x^\dagger A x + \frac{1}{2}x^\dagger A^\dagger x$$
$$= x^\dagger A x$$

$$\therefore x^\dagger\left(\frac{A+A^\dagger}{2}\right)x > 0\,\forall x \neq 0 \iff x^\dagger A x > 0\,\forall x \neq 0$$

3.5. Ejercicio 16

$(\implies)$ Si B es no singular entonces sus filas y columnas son linealmente independientes. Si A es definida positiva entonces $x^\dagger A x > 0\,\forall x \neq 0$. Notemos:

$$\begin{aligned}
x^\dagger BAB^\dagger x &= x^\dagger BAB^\dagger x\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i^\dagger\right) A \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)\\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)}_{=y}{}^\dagger A \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)}_{=y}\\
&= y^\dagger A y\\
&> 0\,\forall y \neq 0
\end{aligned}$$

$(\impliedby)$ Tenemos que $x^\dagger BAB^\dagger x > 0\,\forall x \neq 0$. Notemos:

$$\begin{aligned}
x^\dagger BAB^\dagger x &= x^\dagger BAB^\dagger x\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i^\dagger\right) A \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)^\dagger A \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)\\
&> 0\,\forall x \neq 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \neq 0\,\forall x \neq 0$$

Esto significa que las filas de B son linealmente independientes y, por lo tanto, B es no singular. Entonces, podemos tomar $y = B^\dagger x$ y entonces:

$$yAy > 0\,\forall x \neq 0$$

Como las filas de B son linealmente independientes entonces forman una base de $\mathbb{R}^n$ y como el vector y es una combinación lineal arbitraria no nula de las filas de B entonces eligiendo bien los valores de x_i uno puede armarse cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ (menos el 0). Entonces, $yAy > 0\,\forall y \neq 0$ y por definición A es definida positiva.

4. Guia 4: Matrices Ortogonales y Factorización QR

4.1. Ejercicio 2

$(a) \iff (b)$ Tomemos f_i y c_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, como las filas y columnas de Q respectivamente. Notemos:

$$\begin{aligned} Q^{-1}Q &= Q^{\dagger}Q \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta_{ij} &= \left(Q^{\dagger}Q\right)_{ij} \\ &= c_i^{\dagger}c_j \end{aligned}$$

Entonces, las columnas de Q forman un conjunto ortonormal, ya que e producto interno de dos columnas es 1 si son las mimas columnas y 0 si son distintas.

$(a) \iff (c)$

$$\begin{aligned} QQ^{-1} &= QQ^{\dagger} \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta_{ij} &= \left(QQ^{\dagger}\right)_{ij} \\ &= f_i^{\dagger}f_j \end{aligned}$$

$(a) \iff (d)$

$$\begin{aligned} \| Qx \|_2 &= (Qx)^{\dagger} Qx \\ &= x^{\dagger} \underbrace{Q^{\dagger}Q}_{=\mathbb{I}} x \\ &= x^{\dagger}x \\ &= \| x \|_2 \end{aligned}$$

4.2. Ejercicio 4

4.2.1. (a)

$$\begin{aligned} \det(Q) &= \det\left(Q^{\dagger}\right) \\ &= \det\left(Q^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \det\left(QQ^{-1}\right) &= \det^2(Q) \\ &= \det(\mathbb{I}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore |\det(Q)| = 1$$

Las matrices ortogonales $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pertenecen al grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$. Además, las matrices ortogonales $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que cumplen que $\det(Q) = 1$ pertenecen al grupo $\mathrm{SO}(n)$ (*Special Orthogonal*).

4.2.2. (b)

$$
\begin{aligned}
\kappa_2(Q) &= \| Q \|_2 \| Q^{-1} \|_2 \\
&= \| Q \|_2 \| Q^{\dagger} \|_2 \\
&= \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 \neq 1} (\| Qx \|_2) \right) \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 \neq 1} (\| Q^{\dagger} x \|_2) \right) \\
\| Qx \|_2 = \| x \|_2 \rightarrow &= \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 \neq 1} (\| x \|_2) \right) \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 \neq 1} (\| x \|_2) \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

4.3. Ejercicio 7

Usemos el método de Givens primero (método de rotaciones). Tenemos:

$$
A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}
$$

Entonces, tomemos la matriz de rotación:

$$
W_{12} = \begin{pmatrix} \frac{12}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & \frac{6}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & \frac{12}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore W_{12}A &= \begin{pmatrix} \frac{12}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & \frac{6}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & \frac{12}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{(12)^2+(6)^2} & \frac{-51\cdot 12+6\cdot 167}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & \frac{12\cdot 4-6\cdot 68\cdot}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} \\ 0 & \frac{6\cdot 51+12\cdot 167}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} & \frac{-6\cdot 4-12\cdot 68}{\sqrt{(12)^2+(6)^2}} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \\
&= A^{(1)}
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
W_{13} = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} & 0 & \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore W_{13}A^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} & 0 & \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 13\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2} & \frac{6\sqrt{5}\cdot 13\sqrt{5}-4\cdot 24}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} & \frac{-6\sqrt{5}\cdot 12\sqrt{5}+4\cdot 41}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & \frac{4\cdot 13\sqrt{5}+6\sqrt{5}\cdot 24}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} & \frac{-4\cdot 12\sqrt{5}-6\sqrt{5}\cdot 41}{\sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2+(-4)^2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&= A^{(2)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, tomemos:

$$
W_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{77\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} & \frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} \\ 0 & -\frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} & \frac{77\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore W_{23}A^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{77\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} & \frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} \\ 0 & -\frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} & \frac{77\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 77\sqrt{5} & -28\sqrt{5} \\ 0 & 14\sqrt{5} & -21\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & \sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2} & \frac{-77\sqrt{5}\cdot 28\sqrt{5}-14\sqrt{5}\cdot 21\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{14\sqrt{5}\cdot 28\sqrt{5}-77\sqrt{5}\cdot 21\sqrt{5}}{\sqrt{\left(-14\sqrt{5}\right)^2+\left(77\sqrt{5}\right)^2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \\
&= A^{(3)}
\end{aligned}
$$

Notemos que $A^{(3)}$ es triangular superior así que tomemos $R = A^{(3)}$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
R &= \underbrace{W_{23}W_{13}W_{12}}_{=Q^{-1}}A \\
&= Q^{-1}A
\end{aligned}
$$

Entonces, calculemos Q^{-1} multiplicando las matrices W y luego la inversa es simple de calcular ya que como Q es ortogonal sabemos que $Q^{-1} = Q^{\dagger}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
Q^\dagger &= W_{23}W_{13}W_{12} \\
&= W_{23}\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{7} & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= W_{23}\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{4\sqrt{5}}{35} & \frac{2\sqrt{5}}{35} & \frac{3\sqrt{5}}{7} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11\sqrt{5}}{25} & \frac{2\sqrt{5}}{25} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{25} & \frac{11\sqrt{5}}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{4\sqrt{5}}{35} & \frac{2\sqrt{5}}{35} & \frac{3\sqrt{5}}{7} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{69}{175} & \frac{158}{175} & \frac{6}{35} \\ \frac{58}{175} & -\frac{6}{175} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & -\frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}
$$

Ahora, usemos el método de Householder (método de reflexiones). Tenemos la misma matriz:

$$
A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}
$$

Entonces, tomemos los vectoes v_1, w_1 y u_1 de la siguiente manera:

$$
v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} \| v_1 \|_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_1 = \frac{v_1 - w_1}{\| v_1 - w_1 \|_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore w_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{(12)^2 + (6)^2 + (-4)^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore u_1 &= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (6)^2 + (-4)^2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces, tomemos la matriz de reflexión:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \mathbb{I} - 2u_1u_1^{\dagger} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore W_1A &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix} \\
&= A^{(1)}
\end{aligned}
$$

Ahora tomemos los vectores:

$$
v_2 = \begin{pmatrix} -49 \\ 168 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} \| v_2 \|_2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{u}_2 = \frac{v_2 - w_2}{\| v_2 - w_2 \|_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore w_2 &= \begin{pmatrix} \sqrt{(-49)^2 + (168)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 175 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \tilde{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{(-49-175)^2 + (168)^2}} \begin{pmatrix} -49-175 \\ 168 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces, tomemos la matriz de reflexión:

$$
u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \mathbb{I} - 2u_2u_2^{\dagger} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore W_2A^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \\
&= A^{(2)}
\end{aligned}
$$

Como $A^{(2)}$ es triangular superior entonces tomamos $R = A^{(2)}$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
R &= \underbrace{W_2W_1}_{=Q^{-1}} A \\
&= Q^{\dagger} A
\end{aligned}
$$

Entonces, para hallar Q multipliquemos W_1 y W_2 y despues transpongámosla:

$$
\begin{aligned}
Q^{\dagger} &= W_2W_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{69}{175} & \frac{158}{175} & \frac{6}{35} \\ \frac{58}{175} & -\frac{6}{175} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & -\frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}
$$

4.4. Ejercicio 10

Tenemos que:

$$
Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto, podemos tomar a Q como una rotación que lleva al segundo elemento al 0 y $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Demostrémoslo hallando Q. Propongamos:

$$
Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1\cos(\theta) + x_2\sin(\theta) \\ -x_1\sin(\theta) + x_2\cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Queremos hallar θ tal que $-x_1\sin(\theta) + x_2\cos(\theta) = 0$. Como Q es ortogonal entonces conserva la norma y es trivial que $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Entonces:

$$
\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)
$$

4.5. Ejercicio 11

Como $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces sabemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Como A es ortogonal entonces $A^{-1} = A^{\dagger}$ y $ac - b^2 = \pm 1$. Entonces:

$$\begin{cases} a = \pm c \\ b = \pm b \\ c = \pm a \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \det(A) = 1 \iff a = c \wedge a^2 - b^2 = 1 \\ \det(A) = -1 \iff a = -c \wedge b = 0 \wedge |a| = 1 \end{cases}$$

Si elegimos $\det(A) = 1$ entonces podemos tomar $a = \cos(\theta)$ y $b = \sin(\theta)$ ya que cumplen que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\, \forall \theta \in \mathbb{R}$. Estas son las matrices de rotación:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Si elegimos $\det(A) = -1$ entonces tenemos que:

$$A = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas son las matrices de reflexión.

4.6. Ejercicio 13

Consideremos la matriz de rotaciones:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore x^{\dagger} R(\theta)\, x &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) & x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2\right) \cos(\theta) \\
&= \underbrace{\parallel x \parallel^2}_{\geqslant 0} \cos(\theta)
\end{aligned}$$

Entonces, $R(\theta)$ es definida positiva cuando $\cos(\theta) > 0$ - es decir - para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4.7. Ejercicio 15

Para que Q sea ortogonal se debe cumplir que $Q^{\dagger} = Q^{-1}$ y para que sea simétrica se debe cumplir que $Q = Q^{\dagger}$. Entonces, si cumple ambas condiciones cumple que $Q^2 = \mathbb{I}$. Notemos:

$$\begin{aligned}
Q^{\dagger} &= \left(\mathbb{I} - 2uu^{\dagger}\right)^{\dagger} \\
&= \mathbb{I} - 2\left(uu^{\dagger}\right)^{\dagger} \\
&\mathbb{I} - 2uu^{\dagger} \\
&= Q
\end{aligned}$$

Q es simétrica. Veamos que cumple $Q^2 = \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned}
Q^2 &= \left(\mathbb{I} - 2uu^\dagger\right)\left(\mathbb{I} - 2uu^\dagger\right) \\
&= \mathbb{I} - 4uu^\dagger + 4u\underbrace{u^\dagger u}_{=\|u\|_2} u^\dagger \\
&= \mathbb{I} + 4uu^\dagger\left(\| u \|_2 - 1\right) \\
\| u \|_2 = 1 \rightarrow \quad &= \mathbb{I}
\end{aligned}$$

5. Guía 5: Autovalores, Autovectores y el Método de la Potencia

5.1. Ejercicio 2

Para vectores $v, w \in \mathbb{C}^n$ se define el producto interno como:

$$\langle v, w \rangle = v^\dagger \bar{w}$$

Además, notamos $\bar{v}^\dagger = v^*$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, notemos:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda v, w \rangle &= (\lambda v)^\dagger \bar{w} \\
&= \lambda v^\dagger \bar{w} \\
&= \lambda \left\langle v^\dagger, w \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v, \lambda w \rangle &= v^\dagger (\bar{\lambda w}) \\
&= \bar{\lambda} v^\dagger \bar{w} \\
&= \bar{\lambda} \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

Finalmente, notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle w, v \rangle^* &= \left(w^\dagger \bar{v}\right)^* \\
&= v^\dagger \bar{w} \\
&= \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

5.1.1. (a)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica entonces $A = A^\dagger$. Entonces, los autovalores y autovectores de A y $A^\dagger$ son los mismos. Consideremos v_i y λ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, los autovectores y autovalores de A respectivamente. Sean $u, w \in \mathbb{C}^n$, notemos:

$$\begin{aligned}
\langle Au, w \rangle &= (Au)^\dagger \bar{w} \\
&= u^\dagger A^\dagger \bar{w} \\
&= u^\dagger (\bar{A^* w}) \\
&= \langle u, A^* w \rangle
\end{aligned}$$

Entonces,como A es real y simétrica vale que:

$$\langle Au, w \rangle = \langle u, Aw \rangle$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\langle Av_i, v_i\rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_i\rangle \\
&= \lambda_i \langle v_i, v_i\rangle \\
&= \langle v_i, Av_i\rangle \\
&= \langle v_i, \lambda_i v_i\rangle \\
&= \bar{\lambda}_i \langle v_i, v_i\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lambda_i = \bar{\lambda}_i
$$

Por lo tanto, $\lambda_i \in \mathbb{R}\, \forall i$.

5.1.2. (b)

Consideremos $v \in \mathbb{C}^n$ el autovector asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Tomemos $w = v + \bar{v}$ y notemos que entonces $w \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
Aw &= A\,(v + \bar{v}) \\
&= Av + A\bar{v} \\
A \in \mathbb{R}^{n\times n} \rightarrow \quad &= Av + (\bar{Av}) \\
&= \lambda v + (\bar{\lambda v}) \\
\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \quad &= \lambda v + \lambda \bar{v} \\
&= \lambda\,(v + \bar{v}) \\
&= \lambda w
\end{aligned}
$$

Notemos que w es autovector real de A con autovalor real, que es lo que queríamos demostrar.

5.1.3. (c)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica entonces sus autovalores y autovectores son reales. Además, si es definida positiva entonces $v^\dagger Av > 0\, \forall v \neq 0$. Consideremos w autovector real de A con autovalor λ. Entonces:

$$
\begin{aligned}
w^\dagger Aw &= \lambda w^\dagger w \\
&= \lambda \parallel w \parallel_2^2 \\
&> 0
\end{aligned}
$$

Como $\parallel w \parallel_2^2 > 0$ ya que $w \neq 0$ entonces $\lambda > 0$. Análogamente se puede demostrar que si A es definida negativa entonces sus autovalores son negativos.

5.1.4. (d)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal entonces $A^\dagger = A^{-1}$. Consideremos v_i autovectores de A con autovalor asociado λ_i. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\langle v_i, v_i \rangle &= v_i^\dagger \bar{v}_i \\
&= v_i^\dagger \mathbb{I} \bar{v}_i \\
&= v_i^\dagger \left(A^{-1}A\right) \bar{v}_i \\
&= v_i^\dagger \left(A^\dagger A\right) \bar{v}_i \\
&= (Av_i)^\dagger \left(\bar{Av_i}\right) \\
&= (\lambda_i v_i)^\dagger \left(\bar{\lambda_i v_i}\right) \\
&= \lambda_i \bar{\lambda}_i v_i^\dagger \bar{v}_i \\
&= |\lambda_i|^2 \langle v_i, v_i \rangle
\end{aligned}
$$

$$\therefore |\lambda_i|^2 = 1$$

$$\therefore |\lambda_i| = 1 \, \forall i$$

5.1.5. (e)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica entonces $A = -A^\dagger$. Entonces, como $\langle Au, w \rangle = \langle u, A^* w \rangle \; \forall u, w \in \mathbb{C}^n$ tenemos que $\langle Au, w \rangle = -\langle u, Aw \rangle \; \forall u, w \in \mathbb{C}^n$. Tomemos v como autovector de A con autovalor λ y notemos:

$$
\begin{aligned}
\langle Av, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\
&= \lambda \langle v, v \rangle \\
&= -\langle v, Av \rangle \\
&= -\langle v, \lambda v \rangle \\
&= -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle
\end{aligned}
$$

$$\therefore \lambda = -\bar{\lambda}$$

$$\therefore \Re(\lambda) = 0$$

Ya que la parte real de cualquier autovalor es nula la única forma de que un autovalor sea real es si $\lambda = 0$.

5.1.6. (f)

Si $A = \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces tomemos $A = D + R$, donde D es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal de A y R es una matriz triangular con ceros en la diagonal que tiene el resto de los elementos de A. Consideremos v_i como los atovectores de A con autovalores asociados λ_i. Como $Av_i = \lambda_i v_i$ entonces:

$$
\begin{aligned}
(A - \lambda_i \mathbb{I}) v_i &= (D + R - \lambda_i \mathbb{I}) v_i \\
&= (D - \lambda_i \mathbb{I}) v_i + R v_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Consideremos a A triangular inferior. Entonces:

$$Rv_i = (\lambda_i \mathbb{I} - D)\, v_i$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} v_i^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} v_i^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_i - a_{11})\, v_i^{(1)} \\ (\lambda_i - a_{22})\, v_i^{(2)} \\ \vdots \\ (\lambda_i - a_{nn})\, v_i^{(n)} \end{pmatrix}$$

Esto sistema debe ser compatible indeterminado ya que si v_i es autovector de A con autovalor λ_i entonces sabemos que μv_i también debe ser para cualquier $\mu \in \mathbb{C}$. Además, debe valer que $\lambda_i = a_{11}$ o que $v_i^{(1)} = 0$. Si $\lambda_i = a_{11}$ entonces podemos despejar todos coeficientes de v_i en función de uno de ellos. Si $v_i^{(1)} = 0$ entonces nos queda:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} v_i^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_i - a_{22})\, v_i^{(2)} \\ \vdots \\ (\lambda_i - a_{nn})\, v_i^{(n)} \end{pmatrix}$$

En este caso sucede lo mismo. Ya que $v_i \neq 0$ entonces $\exists k \,/\, \lambda_i = a_{kk} \forall i$. Análogamente se puede demostrar lo mismo si A es triangular inferior. Entonces, los autovalores de A son elementos de su diagonal, que es lo que queríamos demostrar.

5.2. Ejercicio 3

5.2.1. (a)

Consideremos a λ autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovector asociado v. Entonces, demostremos que λ^k es autovalor de $A^k \, \forall k \in \mathbb{N}$ con autovector asociado v por inducción. Si $k = 1$ entonces es trivial. Entonces, consideremos que λ^k es autovalor de A^k con autovector asociado v y demostremos que λ^{k+1} es autovalor de A^{k+1} con autovector asociado v. Notemos:

$$\begin{aligned} A^{k+1} v &= A\left(A^k v\right) \\ &= A\left(\lambda^k v\right) \\ &= \lambda^k A v \\ &= \lambda^{k+1} v \end{aligned}$$

Entonces, λ^k es autovalor de A^k con autovector asociado $v \, \forall k \in \mathbb{N}$.

5.2.2. (b)

Consideremos a $\lambda \neq 0$ autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible con autovector asociado v. Notemos:

$$\begin{aligned} v &= \mathbb{I} v \\ &= A^{-1} A v \\ &= \lambda A^{-1} v \end{aligned}$$

$$\therefore A^{-1} v = \lambda^{-1} v$$

5.2.3. (c)

Consideremos a λ autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovector asociado v. Notemos:

$$\begin{aligned}(aA + b\mathbb{I})\, v &= aAv + bv \\ &= a\lambda v + bv \\ &= (a\lambda + b)\, v\end{aligned}$$

5.2.4. (d)

Consideremos a λ autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovector asociado v. Notemos:

$$\begin{aligned}P(A)\, v &= \sum_{n=0}^{m} a_n A^n v \\ A^n v = \lambda^n v \,\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \quad &= \sum_{n=0}^{m} a_n \lambda^n v \\ &= P(\lambda)\, v\end{aligned}$$

5.3. Ejercicio 4

5.3.1. (a)

Para que v_1 y v_2 sean linealmente independientes queremos ver que $\nexists a_1, a_2 \in \mathbb{C} \,/\, a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$, sin contar el caso trivial de $a_1 = a_2 = 0$. Como $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ entonces $a_2 \neq 0$ y $a_1 \neq 0$, ya que en ese caso la única solución es la trivial. Entonces, $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \iff v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$ para cualquier elección de $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$. Es decir, v_1 es un múltiplo de v_2. Tomemos $v_1 = \mu v_2$, $\mu \neq 0$. Notemos:

$$\begin{aligned}Av_1 &= A\mu v_2 \\ &= \mu A v_2 \\ &= \lambda_2 \mu v_2 \\ &= \lambda_2 v_1 \\ &= \lambda_1 v_1\end{aligned}$$

Entonces, $\lambda_1 = \lambda_2$. Es decir, la única forma de que dos autovectores sean linealmente dependientes es si tienen el mismo autovalor. Entonces, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies v_1$ y v_2 son linealmente independientes, que es lo que queríamos demostrar.

5.3.2. (b)

Sabemos que como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes. Para que además sean ortogonales debe cumplirse que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ya que no se cumple si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$). Entonces, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Notemos:

$$\begin{aligned}\langle Av_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, Av_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle\end{aligned}$$

Ya que $\lambda_2 \neq \lambda_1$ entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

5.4. Ejercicio 6

5.4.1. (a)

Vimos que para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de autovalores λ_i distintos y autovectores asociados v_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces v_i y v_j son linealmente independientes para todo par de subíndices $\{i, j\} \,/\, i \neq j$. Demostremos entonces que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base. Supongamos entonces que tenemos un subconjunto de vectores que son base $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $m < n$. Si $v_{m+1} \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ lo podemos excribir como una combinación lineal de los vectores de la base:

$$v_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j$$

Notemos:

$$\begin{aligned} A v_{m+1} &= A \left(\sum_{j=1}^{m} a_j v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j A v_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j v_j \\ &= \lambda_{m+1} v_{m+1} \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_{m+1} v_j \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda_{m+1})\, a_j v_j = 0$$

Ya que $\lambda_j \neq \lambda_{m+1} \, \forall j$ entonces tomando $b_j = (\lambda_j - \lambda_{m+1})\, a_j$ nos queda:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j v_j = 0$$

Ya que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base entonces la única solución es $b_j = 0 \, \forall j$ y entonces $a_j = 0 \, \forall j$ y $v_{m+1} = 0$. Esto es absurdo, por lo que entonces $v_{m+1} \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$. Entonces, por inducción queda demostrado que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base.

5.4.2. (b)

Tomemos la matriz D como una matriz diagonal con los autovalores de A en la diagonal y tomemos S como una matriz con los autovectores de A en las columnas (en el mismo orden que los autovalores de D). Entonces:

$$S^{-1} A S = D \iff AS = SD$$

Notemos:

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore AS &= A \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} D
\end{aligned}
$$

Además, como sabemos que los autovectores de A forman una base entonces sabemos que la matriz S es no singular, ya que tiene vectores linealmente independientes en las columnas.

5.5. Ejercicio 9

Tomemos $A = SDS^{-1}$. Como A es inversible entonces existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A &= A^{-1}SDS^{-1} \\
&= \mathbb{I}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore A^{-1} = SD^{-1}S
$$

Ya que D es diagonal entonces es no singular. Entonces, A^{-1} es diagonalizable. Ahora veamos que $A^{\dagger}$ es diagonalizable:

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger} &= \left(SDS^{-1}\right)^{\dagger} \\
&= \left(DS^{-1}\right)^{\dagger} S^{\dagger} \\
&= S^{-1\dagger} D^{\dagger} S^{\dagger} \\
&= S^{-1\dagger} D S^{\dagger}
\end{aligned}
$$

5.6. Ejercicio 12

Una matriz nilpotente es una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde $\exists k \in \mathbb{N} \,/\, A^k = 0$. Si A es diagonalizable entonces podemos escribir $A = SDS^{-1}$, con D diagonal y S no singular. Notemos:

$$
\begin{aligned}
A^k &= \left(SDS^{-1}\right)^k \\
&= SDS^{-1}\left(SDS^{-1}\right)^{k-1} \\
&= SD\underbrace{S^{-1}S}_{=\mathbb{I}}DS\left(SDS^{-1}\right)^{k-2} \\
&= SD^2S^{-1}\left(SDS^{-1}\right)^{k-2} \\
&= SD^3S^{-1}\left(SDS^{-1}\right)^{k-3} \\
&= \dots \\
&= SD^kS^{-1} \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

Entonces, A no es diagonalizable.

5.7. Ejercicio 13

Tomemos $A = SDS^{-1}$. Notemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(A) &= \operatorname{Tr}\left(SDS^{-1}\right) \\
&= \operatorname{Tr}\left(DS^{-1}S\right) \\
&= \operatorname{Tr}(D) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(SDS^{-1}\right) \\
&= \det(S)\det(D)\det\left(S^{-1}\right) \\
&= \cancel{\det(S)}\det(D)\frac{1}{\cancel{\det(S)}} \\
&= \det(D) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i
\end{aligned}$$

5.8. Ejercicio 15

5.8.1. (a)

Si A es simétrica entonces sabemos que sus autovectores son ortogonales. Entonces, sus autovalores son distintos y reales. Además, como S es una matriz que tiene sus autovectores en las columnas entonces, si los normalizamos, es una matriz ortogonal. Por lo tanto, $S^{-1} = S^{\dagger}$. Entonces, $A = SDS^{\dagger}$.

5.8.2. (b)

Si A es definida positiva y simétrica sabemos que sus autovalores son positivos y que S es una matriz ortogonal. Tomemos $B = SD^{\frac{1}{2}}S^{\dagger}$ y notemos:

$$\begin{aligned}
B^2 &= SD^{\frac{1}{2}}S^{\dagger}SD^{\frac{1}{2}}S^{\dagger} \\
&= SDS^{\dagger} \\
&= A
\end{aligned}$$

5.9. Ejercicio 16

5.9.1. (a)

Tomemos y_0 como una combinación lineal de los autovectores:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
y_0^\dagger x_j &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^\dagger x_j \\
x_i \perp x_j \rightarrow &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\
&= a_j
\end{aligned}
$$

Esto cumple la premisa. Entonces:

$$
\begin{aligned}
A^k y_0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i A^k x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^k x_i
\end{aligned}
$$

que es lo que queríamos demostrar.

5.9.2. (b)

Demostrémoslo por inducción. Para $k = 1$ entonces por definición se cumple que:

$$
y_1 = \frac{Ay_0}{\underbrace{\| Ay_0 \|}_{\neq 0}}
$$

Ahora hagámoslo para $k > 1$. Tenemos que:

$$
y_k = \frac{A^k y_0}{\underbrace{\| A^k y_0 \|}_{\neq 0}}
$$

Entonces, por definición:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= \frac{Ay_k}{\| Ay_k \|} \\
&= \frac{A\frac{A^k y_0}{\|A^k y_0\|}}{\| A\frac{A^k y_0}{\|A^k y_0\|} \|} \\
&= \frac{A^{k+1} y_0}{\cancel{\| A^k y_0 \|}} \frac{\cancel{\| A^k y_0 \|}}{\| A^{k+1} y_0 \|} \\
&= \frac{A^{k+1} y_0}{\| A^{k+1} y_0 \|}
\end{aligned}
$$

5.9.3. (c)

Vimos que:

$$
\begin{aligned}
y_k &= \frac{A^k y_0}{\| A^k y_0 \|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \lim_{k\to\infty} y_k &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^k \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i}{\| \lambda_1^k \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i \|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^k \left(a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right)}{\left|\lambda_1^k\right| \, \| a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i \|} \\
|\lambda_i| < |\lambda_1| \rightarrow &= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^k}{\left|\lambda_1^k\right|} a_1 x_1
\end{aligned}
$$

Si $\lambda_1 > 0$ entonces el límite converge a $a_1 x_1$. Sin embargo, si $\lambda_1 < 0$ entonces la función no converge. Sin emabargo, si tomamos algún k lo suficientemente grande entonces $y_k \approx (-1)^k a_1 x_1$.

5.10. Ejercicio 18

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} r_k &= \lim_{k\to\infty} \frac{y_k^\dagger A y_k}{y_k^\dagger y_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}\right)^\dagger A \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}\right) \underbrace{\left(\| \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|} \|\right)^{-1}}_{=1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i^\dagger}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k A x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i^\dagger}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^{k+1} x_i}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j \lambda_i^k \lambda_j^{k+1} x_i^\dagger x_j}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j \lambda_i^k \lambda_j^{k+1} \delta_{ij}}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\| \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k x_i \|^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{\cancel{2k}+1}}{\cancel{\left|\lambda_1^{2k}\right|}} \frac{\left(a_1^2 + \sum_{i=2}^{k} a_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}\right)}{\| a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i \|^2} \\
|\lambda_1| > |\lambda_i| \rightarrow &= \lim_{k\to\infty} \lambda_1 \frac{\cancel{a_1^2}}{\cancel{a_1^2} \underbrace{\| x_1 \|^2}_{=1}} \\
&= \lambda_1
\end{aligned}
$$

Veamos ahora el error relativo:

$$
\begin{aligned}
\frac{r_k-\lambda_1}{\lambda_1} &= \frac{1}{\lambda_1}\left(\lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}{\| \sum_{i=1}^k a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} x_i \|^2} - \lambda_1\right)\\
&= \frac{\sum_{i=1}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}{\| \sum_{i=1}^k a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} x_i \|^2} - 1\\
&= \frac{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k+1} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}{\| a_1x_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k} x_2 + \sum_{i=3}^k a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} x_i \|^2} - 1\\
&= \frac{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k+1} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}{\left(a_1x_1^\dagger + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k} x_2^\dagger + \sum_{i=3}^k a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} x_i^\dagger\right)\left(a_1x_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k} x_2 + \sum_{i=3}^k a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} x_i\right)} - 1\\
&= \frac{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k+1} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}} - 1\\
&= \frac{\cancel{a_1^2} + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k+1} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1} - \cancel{a_1^2} - a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} - \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}\\
&= \frac{a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}\\
&= \underbrace{\frac{a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right) + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^{2k}}{a_1^2 + a_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \sum_{i=3}^k a_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}}_{=n_k}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\\
&= n_k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

Es fácil ver n_k es una sucesión acotada ya que el denominador es no nulo y $n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)$.

6. Guía 6: Descomposición en Valores Singulares

6.1. Ejercicio 1

6.1.1. (a)

v_i son autovectores de $A^\dagger A$ si y sólo si $A^\dagger AV = VD$, donde D es una matriz diagonal con los autovalores λ_i de $A^\dagger A$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
A^\dagger A V &= \left(U\Sigma V^\dagger\right)^\dagger \left(U\Sigma V^\dagger\right) V \\
&= V\Sigma^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=\mathbb{I}} \Sigma \underbrace{V^\dagger V}_{=\mathbb{I}} \\
&= V\Sigma^\dagger\Sigma \\
\Sigma^\dagger\Sigma \text{ es diagonal} \rightarrow \quad &= VD
\end{aligned}
$$

Notemos además que $\sigma_i^2 = \lambda_i \, \forall i \leqslant n$.

6.1.2. (b)

u_i son autovectores de $AA^\dagger$ si y sólo si $AA^\dagger U = UD$, donde D es una matriz diagonal con los autovalores λ_i de $AA^\dagger$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger U &= \left(U\Sigma V^\dagger\right) \left(U\Sigma V^\dagger\right)^\dagger U \\
&= U\Sigma \underbrace{V^\dagger V}_{=\mathbb{I}} \Sigma^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=\mathbb{I}} \\
&= U\Sigma\Sigma^\dagger \\
\Sigma\Sigma^\dagger \text{ es diagonal} \rightarrow \quad &= UD
\end{aligned}
$$

Notemos además que $\sigma_i^2 = \lambda_i \, \forall i \leqslant m$.

6.1.3. (c)

Ver los incisos anteriores.

6.2. Ejercicio 4

6.2.1. (a)

(1)

$$
\begin{aligned}
A^\dagger A &= \left(U\Sigma V^\dagger\right)^\dagger \left(U\Sigma V^\dagger\right) \\
&= V\Sigma^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=\mathbb{I}} \Sigma V^\dagger \\
&= V\Sigma^\dagger\Sigma V^\dagger
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger &= \left(U\Sigma V^\dagger\right) \left(U\Sigma V^\dagger\right)^\dagger \\
&= U\Sigma \underbrace{V^\dagger V}_{=\mathbb{I}} \Sigma^\dagger U^\dagger \\
&= U\Sigma\Sigma^\dagger U^\dagger
\end{aligned}
$$

(3) Tomemos $M = \left(A^\dagger A\right)^{-1} A^\dagger$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(V\Sigma^\dagger\Sigma V^\dagger\right)^{-1} \left(U\Sigma V^\dagger\right)^\dagger \\
&= \left(V\Sigma^\dagger\Sigma V^\dagger\right)^{-1} V\Sigma^\dagger U^\dagger
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\therefore V\Sigma^\dagger\Sigma V^\dagger M &= V\Sigma^\dagger U^\dagger \\
\Sigma^\dagger\Sigma V^\dagger M &= \Sigma^\dagger U^\dagger \\
\Sigma V^\dagger M &= U^\dagger \\
U^\dagger A M &= U^\dagger \\
AM &= \mathbb{I}
\end{aligned}$$

M es la inversa derecha de A.

6.2.2. (b)

(1)

$$\begin{aligned}
A^\dagger &= \left(U\Sigma V^\dagger\right)^\dagger \\
&= V\Sigma^\dagger U^\dagger
\end{aligned}$$

(2) Si $n = m$ entonces $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Notemos:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \left(U\Sigma V^\dagger\right)^{-1} \\
&= V\left(U\Sigma\right)^{-1} \\
&= V\Sigma^{-1}U^\dagger
\end{aligned}$$

Ya que $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal entonces su inversa existe y además es simplemente la inversa de cada elemento de la diagonal.

(3) Ya que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} A \\ \emptyset_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A \\ \emptyset_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U\Sigma V^\dagger \\ \emptyset_n \end{pmatrix} \\
&= \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^\dagger
\end{aligned}$$

donde $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$, $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$ y $\tilde{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Propongamos:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} U & \emptyset_{m\times n} \\ \emptyset_{n\times m} & \emptyset_n \end{pmatrix}, \; \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma \\ \emptyset_n \end{pmatrix}, \; \tilde{V} = V$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V} &= \begin{pmatrix} U & \emptyset_{m\times n} \\ \emptyset_{n\times m} & \emptyset_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma \\ \emptyset_n \end{pmatrix} V^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} U\Sigma \\ \emptyset_n \end{pmatrix} V^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} U\Sigma V^\dagger \\ \emptyset_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A \\ \emptyset_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} A \\ \emptyset_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & \emptyset_{m\times n} \\ \emptyset_{n\times m} & \emptyset_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \emptyset_n \end{pmatrix} V^\dagger$$

(4) Ya que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} A & \emptyset_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & \emptyset_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U\Sigma V^\dagger & \emptyset_m \end{pmatrix} \\ &= \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^\dagger \end{aligned}$$

donde $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ y $\tilde{V} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$. Propongamos:

$$\tilde{U} = U,\ \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & \emptyset_m \end{pmatrix},\ \tilde{V} = \begin{pmatrix} V & \emptyset_{n\times m} \\ \emptyset_{m\times n} & \emptyset_m \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^\dagger &= U \begin{pmatrix} \Sigma & \emptyset_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^\dagger & \emptyset_{n\times m} \\ \emptyset_{m\times n} & \emptyset_m \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} \Sigma V^\dagger & \emptyset_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U\Sigma V^\dagger & \emptyset_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & \emptyset_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} A & \emptyset_m \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \Sigma & \emptyset_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^\dagger & \emptyset_{n\times m} \\ \emptyset_{m\times n} & \emptyset_m \end{pmatrix}$$

6.3. Ejercicio 5

6.3.1. (a)

Todos los valores singulares de A son iguales ($\sigma_i = \sigma\ \forall i$) si y sólo si $\Sigma = \sigma\mathbb{I}$. Notemos:

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^\dagger \\ &= \sigma U\mathbb{I}V^\dagger \\ &= \sigma UV^\dagger \end{aligned}$$

Ya que U es ortogonal y V es ortogonal entonces $UV^\dagger$ también es ortogonal. Entonces, A es un múltiplo de una matriz ortogonal.

6.3.2. (b)

A y B tienen los mismos valores singulares si y sólo si $\Sigma_A = \Sigma_B$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
A &= U_A \Sigma_A V_A^\dagger \\
&= U_A \Sigma_B V_A^\dagger \\
&= U_A \left(U_B^\dagger B V_B \right) V_A^\dagger \\
&= U_A U_B^\dagger B V_B V_A^\dagger \\
&= PBQ
\end{aligned}
$$

Ya que U_A, U_B, V_A y V_B son ortogonales entonces $P = U_A U_B^\dagger$ y $Q = V_B V_A^\dagger$ también lo son.

6.3.3. (c)

Tomemos U, Σ y V las matrices de la descomposición en valores singulares de $AA^\dagger$ y $BB^\dagger$. Además, tomemos $A = U_A \Sigma_A V_A^\dagger$ y $B = U_B \Sigma_B V_B^\dagger$. Ya que $AA^\dagger = BB^\dagger$ entonces $U_A \Sigma_A^2 U_A^\dagger = U_B \Sigma_B^2 U_B^\dagger$. $AQ = B$ si y sólo si A es no singular y $Q = V_A \Sigma_A^{-1} U_A^\dagger U_B \Sigma_B V_B^\dagger$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
QQ^\dagger &= \left(V_A \Sigma_A^{-1} U_A^\dagger U_B \Sigma_B V_B^\dagger \right) \left(V_B \Sigma_B U_B^\dagger U_A \Sigma_A^{-1} V_A^\dagger \right) \\
&= V_A \Sigma_A^{-1} U_A^\dagger U_B \Sigma_B^2 U_B^\dagger U_A \Sigma_A^{-1} V_A^\dagger \\
U_A \Sigma_A^2 U_A^\dagger = U_B \Sigma_B^2 U_B^\dagger \rightarrow &= V_A \Sigma_A^{-1} U_A^\dagger U_B \left(U_B^\dagger U_A \Sigma_A^2 U_A^\dagger U_B \right) U_B^\dagger U_A \Sigma_A^{-1} V_A^\dagger \\
&= \mathbb{I}
\end{aligned}
$$

Así que Q es ortogonal. Entonces, queremos ver que A es no singular. Esto es lo mismo que ver que todos sus valores singulares son no nulos. Ya que vimos que U_A y V_A son matrices ortogonales cuyas columnas son autovectores de $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$ respectivamente entonces sabemos que sus autovalores son no nulos. Entonces, como los autovalores son el cuadrado de los valores singulares sabemos que los valores singulares son no nulos.

6.4. Ejercicio 7

Ya que A es simétrica y definida positiva entonces sabemos que $w^\dagger A w > 0 \, \forall w \neq 0$. Además, sabemos que sus autovalores son positivos. Tomemos w_i como los autovectores de A y λ_i sus autovalores, tal que $Aw_i = \lambda_i w_i$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
A^\dagger A w_i &= A^2 w_i \\
&= \lambda_i^2 w_i
\end{aligned}
$$

Ya que w_i es un autovector de $A^\dagger A$ con autovalor λ_i^2 entonces se que hay un autovector v_j con autovalor σ_j^2 tales que $w_i = v_j$ y $\lambda_i^2 = \sigma_j^2$. Notemos que como $\sigma_j > 0 \, \forall j$ entonces $\sigma_j = \lambda_i$ y entonces $i = j$. Lo mismo podemos hacer para el resto de los autovalores y obtenemos que $\sigma_i = \lambda_i \, \forall i$.

6.5. Ejercicio 13

6.5.1. (a)

Tomemos $y = \frac{x}{\|x\|}$ ya que y es un vector unitario. Notemos:

$$
\frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \| Ay \|
$$

Maximizar $\| Ay \|$ es lo mismo que maximizar $\| Ay \|^2$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\parallel Ay \parallel^2 &= \parallel U\Sigma V^\dagger y \parallel^2 \\
&= \left(U\Sigma V^\dagger y\right)^\dagger \left(U\Sigma V^\dagger y\right) \\
&= y^\dagger V \Sigma^\dagger \Sigma V^\dagger y \\
&= y^\dagger \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\dagger \\ v_2^\dagger \\ \vdots \\ v_n^\dagger \end{pmatrix} y \\
&= \begin{pmatrix} y^\dagger v_1 & y^\dagger v_2 & \dots & y^\dagger v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\dagger y \\ v_2^\dagger y \\ \vdots \\ v_n^\dagger y \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y^\dagger v_i v_i^\dagger y
\end{aligned}
$$

Ya que v_i son ortogonales entre sí entonces tomemos:

$$
y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 1
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\parallel Ay \parallel^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_i^2 \alpha_j \alpha_k v_j^\dagger v_i v_i^\dagger v_k \\
V \text{ ortogonal} \rightarrow &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_i^2 \alpha_j \alpha_k \delta_{ij}\delta_{ik} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \alpha_i^2 \\
&= \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1}\right)^2 \alpha_i^2
\end{aligned}
$$

Ya que $\sigma_i > \sigma_{i+1} \, \forall i < n$ entonces para maximizar esta cantidad nos conviene tomar $\alpha_i = \delta_{i1} \, \forall i$ para que $\parallel Ay \parallel^2 = \sigma_1^2$. Entonces, nos queda que $y = v_1$ y por lo tanto $x = \lambda v_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Guia 7: Métodos Iterativos

7.1. Ejercicio 2

Recordemos que una norma matricial $\parallel . \parallel$ se llama consistente con una norma vectorial $\parallel . \parallel$ si $\parallel Ax \parallel \leqslant \parallel A \parallel \parallel x \parallel \ \forall x$. Consideremos v un autovector de A con autovalor λ. Entonces, $Av = \lambda v$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\parallel Av \parallel &= \parallel \lambda v \parallel \\
&= |\lambda| \parallel v \parallel \\
&\leqslant \parallel A \parallel \parallel v \parallel
\end{aligned}
$$

$$\therefore |\lambda| \leqslant \| A \| \ \forall \lambda$$

Ya que $\rho(A) = \text{máx}(|\lambda|)$ entonces $\rho(A) \leqslant \| A \|$.

7.2. Ejercicio 3

Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore D = \mathbb{I},\ L + U = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que los autovalores de T son $\pm\rho$. Ya que $|\rho| < 1$ entonces T es convergente y los métodos convergen.

7.3. Ejercicio 4

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica definida positiva de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Entonces, siguiendo el método de Jacobi definamos:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore T &= D^{-1}(L+U) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Veamos que T es convergente. Para eso es necesario que $\rho(T) < 1$. Es fácil ver que los autovalores de T son $\pm\frac{b}{\sqrt{ac}}$. Ya que es definida positiva entonces $v^{\dagger}Av > 0\,\forall v \neq 0$. Notemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 & bv_1 + cv_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} \\
&= a|v_1|^2 + b\bar{v}_1 v_2 + bv_1\bar{v}_2 + c|v_2|^2 \\
&= a|v_1|^2 + 2b\Re(\bar{v}_1 v_2) + c|v_2|^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Entonces, veamos que $\left|\frac{b}{\sqrt{ac}}\right| < 1$ sabiendo que $a|v_1|^2 + 2b\Re(\bar{v}_1 v_2) + c|v_2|^2 > 0$. Consideremos $a > 0$ y $c > 0$ y tomemos $v_1 = \sqrt{c}$ y $v_2 = \sqrt{a}$ entonces:

$$\begin{aligned} a\left|v_1\right|^2 + 2b\Re\left(\bar{v}_1 v_2\right) + c\left|v_2\right|^2 &= ac + 2b\sqrt{ac} + ca \\ &= 2\underbrace{ac}_{>0}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{ac}}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b}{\sqrt{ac}} > -1$$

Ahora tomemos $v_1 = \sqrt{c}$ y $v_2 = -\sqrt{a}$:

$$\begin{aligned} av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2 &= ac - 2b\sqrt{ac} + ca \\ &= 2\underbrace{ac}_{>0}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{ac}}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b}{\sqrt{ac}} < 1$$

Entonces, queda demostrado que para $a > 0$ y $c > 0$ entonces $\left|\frac{b}{\sqrt{ac}}\right| < 1$. Si consideramos $a < 0$ y $c < 0$ entonces las mismas elecciones de v_1 y v_2 sirven ya que $\sqrt{ac} = \sqrt{|ac|}$. Consideremos entonces $a > 0$ y $c < 0$ y tomemos $v_1 = -\sqrt{c}$ y $v_2 = \sqrt{-a}$:

$$\begin{aligned} a\left|v_1\right|^2 + 2b\Re\left(\bar{v}_1 v_2\right) + c\left|v_2\right|^2 &= -ac + 2b\Re\left(-\sqrt{|ac|}\right) + ca \\ &= -2\frac{b}{\sqrt{|ac|}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b}{\sqrt{|ac|}} < 0$$

Ahora tomemos $v_1 = \sqrt{-c}$ y $v_2 = \sqrt{a}$:

$$\begin{aligned} a\left|v_1\right|^2 + 2b\Re\left(\bar{v}_1 v_2\right) + c\left|v_2\right|^2 &= -ac + 2b\Re\left(\sqrt{|ac|}\right) + ca \\ &= 2\frac{b}{\sqrt{|ac|}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b}{\sqrt{|ac|}} > 0$$

Entonces, $b = 0$ y se deduce que $\left|\frac{b}{\sqrt{ac}}\right| < 1$. Análogamente se puede demostrar lo mismo si $a < 0$ y $c > 0$.

7.4. Ejercicio 5

7.4.1. (a)

Tenemos que:

$$x^{(k)} = Rx^{(k-1)} + c,\ R = M^{-1}N,\ c = M^{-1}b,\ A = M - N$$

Para que la sucesión converja necesitamos que R sea convergente, es decir, que $\rho(R) < 1$. Sabemos que $\| R \| < 1$ para alguna norma subordinada (o inducida). En el ejercicio 2 demostré la desigualdad $\rho(A) \leqslant \| A \|$ para cualquier norma consistente. Es trivial ver que las normas inducidas son consistentes (por definición), por lo que $\rho(R) \leqslant \| R \| < 1$. Por lo tanto, la sucesión converge.

7.4.2. (b)

Si A es singular entonces $\exists v \,/\, Av = 0$. Notemos:

$$\begin{aligned} Av &= (M - N)\, v \\ &= Mv - Nv \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore Mv = Nv$$

$$\begin{aligned} \therefore v &= M^{-1}Nv \\ &= Rv \end{aligned}$$

Notemos que entonces uno de los autovalores de R es 1. Por lo tanto, $\rho(R) \geqslant 1$.

7.5. Ejercicio 6

Tomemos A de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore D^{-1}(L + U) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como A es estrictamente diagonal dominante entonces sabemos que $a_{ii} > \sum_{j \neq i} a_{ij} \, \forall i$. Entonces, $\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} < 1 \, \forall i$. Por eso, $\| D^{-1} (L+U) \|_{\infty} < 1$, ya que esta norma es la mayor suma de las filas de la matriz.

7.6. Ejercicio 10

7.6.1. (a)

Tenemos $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica con autovalores $\lambda_{i+1} \geqslant \lambda_i \, \forall i$, $\lambda_1 > 1$ y una constante $\omega > 1$. Tenemos $Ax^* = b$ y nos definen la secuencia:

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1 - \omega a_{ii}) \, x_i^{(k)} - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \omega a_{ij} x_j^{(k)}$$

Queremos convertir esta secuencia a forma matricial y ver si converge a la solución x^*. Notemos:

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \\
&= \omega \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} a_{11} x_1^{(k)} \\ a_{22} x_2^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nn} x_n^{(k)} \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} a_{12} x_2^{(k)} + a_{13} x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n} x_n^{(k)} \\ a_{21} x_1^{(k)} + a_{23} x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n1} x_1^{(k)} + a_{n2} x_2^{(k)} + \cdots + a_{n(n-1)} x_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \omega b + x^{(k)} - \omega \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \\
&= \omega b + x^{(k)} - \omega D x^{(k)} + \omega \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) x^{(k)} \\
&= \omega b + (\mathbb{I} - \omega D) \, x^{(k)} + \omega (L+U) \, x^{(k)} \\
&= (\mathbb{I} - \omega (D - L - U)) \, x^{(k)} + \omega b \\
&= (\mathbb{I} - \omega A) \, x^{(k)} + \omega b \\
&= T x^{(k)} + c
\end{aligned}$$

$$\therefore T = \mathbb{I} - \omega A, \; c = \omega b$$

Por lo tanto, como la sucesión tiene la forma de $x^{(k+1)} = T x^{(k)} + c$ sabemos que si converge debe ser a la solución del sistema.

7.6.2. (b)

Para que la sucesión converja queremos ver que T es una matriz convergente. Como A es simétrica entonces T es simétrica. Entonces, existe una matriz V ortogonal tal que $A = V \Lambda V^{\dagger}$, donde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1)$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
TV &= (\mathbb{I} - \omega A) V \\
&= V - \omega AV \\
&= V - \omega V\Lambda \\
&= V (\mathbb{I} - \omega\Lambda)
\end{aligned}
$$

Entonces, los autovectores de T son los mismos que los de A y los autovalores de T son $\mu_i = 1 - \omega\lambda_i$. Ya que $\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}\, \forall i$ entonces $\rho(T) = |1 - \omega\lambda_n|$. Por lo tanto, como $\omega > 0$ la sucesión converge a la solución si y sólo si $\omega < \frac{2}{\lambda_n}$.

7.7. Ejercicio 11

7.7.1. (a)

Tenemos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con columnas linealmente independientes (típico de problemas de cuadrados mínimos) y queremos resolver $A^\dagger Ax = A^\dagger b$ de forma iterativa. El algoritmo propuesto describa la siguiente sucesión:

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega A^\dagger \left(b - Ax^{(k)}\right) \\
&= \left(\mathbb{I} - \omega A^\dagger A\right) x^{(k)} + \omega A^\dagger b \\
&= Tx^{(k)} + c
\end{aligned}
$$

$$
\therefore T = \mathbb{I} - \omega A^\dagger A,\ c = \omega A^\dagger b
$$

Como la sucesión tiene la forma $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ entonces si converge debe ser a la solución del sistema. La sugerencia pide que demostremos que $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}\, \forall k$, así que hagámoslo por inducción. Para $k = 0$ es trivial, ya que se cumple por definición. Entonces, tomemos $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ y veamos que luego de una iteración se cumple que $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$. Notemos:

$$
x^{(k+1)} = \left(\mathbb{I} - \omega A^\dagger A\right) x^{(k)} + \omega A^\dagger b
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore b - Ax^{(k+1)} &= b - A\left(\left(\mathbb{I} - \omega A^\dagger A\right) x^{(k)} + \omega A^\dagger b\right) \\
&= b - A\left(\mathbb{I} - \omega A^\dagger A\right) x^{(k)} - \omega AA^\dagger b \\
&= \left(\mathbb{I} - \omega AA^\dagger\right) b - A\left(\mathbb{I} - \omega A^\dagger A\right) x^{(k)} \\
&= \left(\mathbb{I} - \omega AA^\dagger\right) b - \left(A - \omega AA^\dagger A\right) x^{(k)} \\
&= \left(\mathbb{I} - \omega AA^\dagger\right) b - \left(\mathbb{I} - \omega AA^\dagger\right) Ax^{(k)} \\
&= \left(\mathbb{I} - \omega AA^\dagger\right) \left(b - Ax^{(k)}\right) \\
&= \left(\mathbb{I} - \omega AA^\dagger\right) r^{(k)} \\
&= r^{(k)} - \omega AA^\dagger r^{(k)} \\
&= r^{(k+1)}
\end{aligned}
$$

7.7.2. (b)

Para que la sucesión converja queremos que T sea convergente, es decir, que $\rho(T) < 1$. Notemos que como $T = \mathbb{I} - \omega A^\dagger A$ entonces los autovalores son $\mu_i = 1 - \omega\lambda_i$ (lo vimos en el ejercicio anterior). Entonces, $\rho(T) = |1 - \omega\lambda_{max}|$. Por lo tanto, $\rho(T) < 1 \iff 0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{max}}$.

8. Guía 8: Cuadrados Mínimos Lineales

8.1. Ejercicio 2

Es sabido que extremar una función $f(x)$ da el mismo resultado que extremar la función $(f(x))^2$. Con eso en mente, extrememos la norma al cuadrado usando que $\| a - tb \|_2^2 = (a - tb)^\dagger (a - tb)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| a - tb \|_2^2 &= 2(a - tb)^\dagger \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a - tb) \\ &= -2(a - tb)^\dagger b \\ &= -2a^\dagger b + 2t \| b \|_2^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{a^\dagger b}{\| b \|_2^2}$$

8.2. Ejercicio 3

8.2.1. (a)

Recordemos que $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \,/\, \exists x \in \mathbb{R}^n : y = Ax\}$. Consideremos entonces algún $x \in \mathbb{R}^n$ y notemos:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}, \, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore Ax &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \\ &= y\end{aligned}$$

Notemos entonces que todo $y \in \mathrm{Im}(A)$ es una combinación lineal de las columnas de A. Llamemos $C(A)$ al espacio columna de A. Entonces, sabemos que $\mathrm{Im}(A) \subseteq C(A)$, ya que $\forall y \in \mathrm{Im}(A) \implies y \in C(A)$. Además, como el proceso inverso es válido (tomar una combinación lineal de las columnas de A y hallar un vector x) entonces deducimos que $\forall y \in C(A) \implies y \in \mathrm{Im}(A)$. Por lo tanto, $C(A) = \mathrm{Im}(A)$.

8.2.2. (b)

Recordemos que $\mathrm{Nu}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = 0\}$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(A)^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \,/ y \perp x \, \forall x \in \mathrm{Nu}(A)\}$. Consideremos entonces un vector y perteneciente al espacio de fila de A, llamémoslo $F(A)$. Lo expresamos como una combinación lineal de las filas de A:

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$$

donde f_i son las filas de A y a_i son constantes reales. Tomemos también un vector $x \in \mathrm{Nu}(A)$ tal que $Ax = 0$ (por definición). Es decir:

$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{pmatrix} f_1^\dagger \\ f_2^\dagger \\ \vdots \\ f_m^\dagger \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} f_1^\dagger x \\ f_2^\dagger x \\ \vdots \\ f_m^\dagger x \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f_i^\dagger x = 0 \, \forall i$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
y^\dagger x &= \left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i \right)^\dagger x \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i f_i^\dagger x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, todos los y del espacio fila de A son vectores ortogonales a los vectores de $\mathrm{Nu}\,(A)$. Por lo tanto, el espacio fila de A es $\mathrm{Nu}\,(A)^\perp$.

8.2.3. (c)

Notemos que $\mathrm{Im}\,(A)^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m \,/\, y \perp x \, \forall x \in \mathrm{Im}\,(A)\}$ y que $\mathrm{Nu}\left(A^\dagger\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^m \,/\, A^\dagger x = 0\right\}$. Por lo que vimos en los incisos anteriores sabemos que $\mathrm{Im}\,(A)^\perp = C\,(A)^\perp$ y que $\mathrm{Nu}\left(A^\dagger\right) = F\left(A^\dagger\right)^\perp$. Notemos que $F\left(A^\dagger\right) = C\,(A)$, así que $F\left(A^\dagger\right)^\perp = C\,(A)^\perp$. Entonces, queda demostrado que $\mathrm{Im}\,(A)^\perp = \mathrm{Nu}\left(A^\dagger\right)$.

8.3. Ejercicio 4

Sabemos que $u \perp v \iff u^\dagger v = 0$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\| u + v \|_2^2 &= (u+v)^\dagger (u+v) \\
&= \left(u^\dagger + v^\dagger\right)(u+v) \\
&= u^\dagger u + \underbrace{u^\dagger v}_{=0} + \underbrace{v^\dagger u}_{=0} + v^\dagger v \\
&= \| u \|_2^2 + \| v \|_2^2
\end{aligned}
$$

8.4. Ejercicio 5

Tomemos $s \in S$ y tomemos $x \in \mathbb{R}^m$. Ya que $s \in S$ y P es una proyección ortogonal en S entonces $Ps = s$. Tomemos entonces $v = (\mathbb{I} - P)\,x$ y veamos que $v \in S^\perp$ mostrando que $s^\dagger v = 0$:

$$
\begin{aligned}
s^\dagger v &= s^\dagger (\mathbb{I} - P) x \\
&= s^\dagger x - s^\dagger P x \\
s = Ps \rightarrow &= s^\dagger x - (Ps)^\dagger P x \\
&= s^\dagger x - s^\dagger P^\dagger P x \\
&= s^\dagger x - s^\dagger x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

8.5. Ejercicio 6

8.5.1. (a)

Ya que y es la proyección ortogonal de b en S entonces llamemos P a esa proyección, tal que $y = Pb$. Entonces, $b - y = (\mathbb{I} - P) b$. En el ejercicio anterior vimos que $(\mathbb{I} - P) x \in S^\perp \, \forall x \in \mathbb{R}^m$, así que en particular esto se cumple para $x = b$.

8.5.2. (b)

Consideremos $x \in S$ y veamos que el elemento de S que minimiza la norma (o norma al cuadrado que es lo mismo) es $y = Pb$, donde P es la proyección ortogonal:

$$
\begin{aligned}
\| b - s \|_2^2 &= \| b - y + y - s \|_2^2 \\
&= \| b - Pb + y - s \|_2^2 \\
&= \| (\mathbb{I} - P) b + (y - s) \|_2^2 \\
(y - s) \in S \wedge (\mathbb{I} - P) b \in S^\perp \rightarrow &= \| (\mathbb{I} - P) b \|_2^2 + \| y - s \|_2^2 \\
&\geqslant \| (\mathbb{I} - P) b \|_2^2 \\
&= \| b - y \|_2^2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \| b - y \|_2 \leqslant \| b - s \|_2 \;\; \forall s \in S
$$

8.6. Ejercicio 7

8.6.1. (a)

$(\implies)$ Si $\| b - Ax^* \|_2 = \min\limits_{w \in \mathbb{R}^n} (\| b - Aw \|_2)$ entonces Ax^* es la proyección ortogonal de b a la imagen de A (por lo que vimos en el ejercicio anterior). Es decir, $Ax^* = Pb$, donde P es la proyección ortogonal a $\operatorname{Im}(A)$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
b - Ax^* &= b - Pb \\
&= (\mathbb{I} - P) b \\
&\in \operatorname{Im}(A)^\perp
\end{aligned}
$$

$(\impliedby)$ Tomemos $w \in \mathbb{R}^n$ y escribámoslo como $w = x^* - x$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\| b - Aw \|_2^2 &= \| b - A(x^* - x) \|_2^2 \\
&= \| b - Ax^* + Ax \|_2^2 \\
Ax \in \operatorname{Im}(A) \wedge (b - Ax^*) \in \operatorname{Im}(A)^\perp \rightarrow &= \| b - Ax^* \|_2^2 + \| Ax \|_2^2 \\
&\geqslant \| b - Ax^* \|_2^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore \| b - Ax^* \|_2 \leqslant \| b - Aw \|_2$$

Por lo tanto, se deduce que $\| b - Ax^* \|_2 = \min_{w \in \mathbb{R}^n} (\| b - Aw \|_2)$.

8.6.2. (b)

Notemos que la solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$, llamémosla x^*, cumple que $\| b - Ax^* \|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} (\| b - Ax \|_2)$. Entonces, por lo que vimos en el ítem anterior sabemos que entonces $(b - Ax^*) \in \operatorname{Im}(A)^{\perp}$. Además, en el ejercicio 3 vimos que $\operatorname{Im}(A)^{\perp} = \operatorname{Nu}\left(A^{\dagger}\right)$, así que $(b - Ax^*) \in \operatorname{Nu}\left(A^{\dagger}\right)$. Por lo tanto, $A^{\dagger}(b - Ax^*) = 0$. Notemos que entonces $A^{\dagger}Ax^* = A^{\dagger}b$. Por lo tanto, x^* es la solución del sistema que buscábamos. El proceso inverso se puede aplicar para demostrar que si $A^{\dagger}Ax^* = A^{\dagger}b \implies x^*$ es solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$.

8.7. Ejercicio 9

Sabemos que $Ax = y$ así que supongamos que $A\hat{x} = y$. Entonces, $A(x - \hat{x}) = 0$. Por lo tanto, $(x - \hat{x}) \in \operatorname{Nu}(A)$. El proceso inverso también es válido. Entonces, demostremos que el problema de cuadrados mínimos tiene solución única si $\operatorname{Nu}(A) = \{0\}$. Tomemos x_1 y x_2 como dos soluciones de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$ y supongamos que $\operatorname{Nu}(A) = \{0\}$. Entonces, por lo que vimos en el ejercicio anterior sabemos que ambos vectores son soluciones del sistema $A^{\dagger}Ax = A^{\dagger}b$. Por lo tanto, $(x_1 - x_2) \in \operatorname{Nu}\left(A^{\dagger}A\right)$ y entonces $A(x_1 - x_2) \in \operatorname{Nu}\left(A^{\dagger}\right)$. Notemos que, por lo que vimos en el ejercicio 3, sabemos que $A(x_1 - x_2) \in \operatorname{Im}(A)^{\perp}$, pero $A(x_1 - x_2) \in \operatorname{Im}(A)$ ya que es una combinación lineal de elementos de la imagen de A $(Ax_1 \in \operatorname{Im}(A) \wedge Ax_2 \in \operatorname{Im}(A))$. Por lo tanto, $A(x_1 - x_2) \in \operatorname{Im}(A)^{\perp} \cap \operatorname{Im}(A) = \{0\}$. Ya que $\operatorname{Nu}(A) = \{0\}$ entonces $x_1 = x_2$ y, por lo tanto, la solución es única. Si $\operatorname{Nu}(A) \neq \{0\}$ entonces podría suceder que $(x_1 - x_2) \in \operatorname{Nu}(A)$ y entonces el sistema admita dos soluciones distintas.

8.8. Ejercicio 10

8.8.1. (a)

Si, las ecuaciones normales se pueden utilizar siempre sin restricción. A lo sumo podría llegar a aparecer un problema debido al redondeo de la aritmética finita pero analíticamente las ecuaciones normales se pueden usar ya que son un si y sólo si.

8.8.2. (b)

Ya que las filas de A son todas iguales con encontrar un $x_0 \in \operatorname{Nu}(f)$ basta, donde f es la fila de A que se repite. Ya que $f^{\dagger} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $x_0^{\dagger} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Nu}(f)$.

8.8.3. (c)

Tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger}A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4n & 2n \\ 2n & 4n \end{pmatrix} \\
&= 2n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger}b &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6n \\ 3n \end{pmatrix} \\
&= 3n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore A^{\dagger}Ax &= 2n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= A^{\dagger}b \\
&= 3n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}
$$

$$
\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}
$$

Entonces, $x^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ es solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= b
\end{aligned}
$$

En este caso no sólo es solución de cuadrados mínimos sino que también es solución analítica. Esto se debe a que en sí la matriz dada representa el mismo punto $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ repetido muchas veces en la matriz con el mismo resultado $b = 3$.

8.8.4. (d)

Ya que $\mathrm{Nu}\,(A) \neq \{0\}$ entonces sabemos que la solución no es única. Notemos que $\tilde{x}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ también es solución exacta del sistema.