**Métodos Numéricos**
24 de julio de 2020
**Recuperatorio**
**Primer Parcial**

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

| | Nombre y Apellido | | | |
|---|---|---|---|---|
| ☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas | *Yulita Federico* | | | |
| ☐ Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen | Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Nota |
| ☐ **Justificar todas las respuestas** | 25 | 30 | 30 | 85 A |

1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Definimos $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ como $B = \begin{pmatrix} A & v \\ w^t & d \end{pmatrix}$. Sea $x_v \in \mathbb{R}^n$ la solución de $Ax = v$.

   (a) Probar que $B$ es inversible si y sólo si $d - w^t x_v \neq 0$. (15 puntos)

   (b) Supongamos que $B$ es inversible. Sean $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Notamos $x_b$ al vector de $\mathbb{R}^n$ tal que $Ax_b = b$. Mostrar que la solución de $Bx = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ está dada por $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ con $y = x_b - z\, x_v$ y $z = \dfrac{c - w^t x_b}{d - w^t x_v}$. (20 puntos)

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando o dando un contraejemplo: (15 puntos cada ítem)

   (a) La matriz $\begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^t & aI \end{pmatrix}$ es definida positiva para todo $a \in \mathbb{R}$ no nulo, siendo $I$ la matriz identidad y $P$ una matriz de permutación, ambas de $n \times n$.

   (b) Sea $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ y $A = uu^t$. Si $B(t) = (1-t)I + tA^tA$, entonces $B(t)$ es definida positiva para todo $0 \leq t \leq 1$.

3. Se define la matriz $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para cualquier $n$ potencia de 2, de forma inductiva de la siguiente manera:

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{n/2} & H_{n/2} \\ H_{n/2} & -H_{n/2} \end{pmatrix}$$

   siendo $H_1 = [\,1\,]$.

   (a) Probar que la matriz $H_n$ es ortogonal para cualquier $n$ potencia de 2. (15 puntos)

   (b) Determinar si $H_2$ es una matriz de Givens, una matriz de Householder, o ninguna de las anteriores. Justificar en cada caso, especificando qué rotación se realiza si es de Givens, o respecto de qué recta refleja si es de Householder. (20 puntos)

FEDERICO YULITA
351/17

1) B Hago el inciso B primero porque el A está difícil.
Basta con probar haciendo la cuenta:

$$Bx = \begin{pmatrix} A & v \\ w^t & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay + zv \\ w^t y + zd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

Usemos que $\begin{cases} y = x_b - z x_v \\ z = \dfrac{c - w^t x_b}{d - w^t x_v} \end{cases}$ :

$$Ay + zv = A(x_b - z x_v) + zv = b - zv + zv = b \checkmark$$

$$w^t y + zd = w^t x_b - z w^t x_v + zd = w^t x_b + \left(\frac{c - w^t x_b}{d - w^t x_v}\right)(d - w^t x_v)$$

$$= w^t x_b + c - w^t x_b = c \checkmark$$

A Veamos la factorización LU de B:

$$B = L_B U_B = \begin{pmatrix} \tilde{L} & 0 \\ f^t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{U} & c \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}\tilde{U} & \tilde{L}c \\ f^t\tilde{U} & f^t c + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & v \\ w^t & d \end{pmatrix}$$

Como A es inversible sabemos $\tilde{L}$ y $\tilde{U}$ provienen de la factorización LU de A y son únicos. Entonces:

A inversible $\not\Rightarrow \exists\, A = LU$

$$\begin{cases} c = \tilde{L}^{-1} v \\ f = \tilde{U}^{-1^t} w \\ u = d - w^t \underbrace{\tilde{U}^{-1}\tilde{L}^{-1} v}_{x_v ?} \end{cases}$$

Notemos: $u = d - w^t(\tilde{L}\tilde{U})^{-1} v = d - w^t A^{-1} v$
$= d - w^t x_v$

si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ?

Para que B sea inversible $L_B$ y $U_B$ deben serlo, y si $u = 0$ entonces la última fila de $U_B$ es 0 y no es inversible. Así que, $u \neq 0$ y entonces $d - w^t x_v \neq 0$.

FEDERICO YULITA

FEDERICO YULITA
351/17



2) A Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$ / $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$. Notemos:

$$v^t \begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^t & aI \end{pmatrix} v = (x^t \ y^t) \begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^t & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax^t - ay^tP^t \quad ax^tP + ay^t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= ax^tx - ay^tP^tx + ax^tPy + ay^ty$$

$$= a\left(\|x\|_2^2 - \cancel{(x^tPy)^t} + \cancel{x^tPy} + \|y\|_2^2\right)$$

$$= a\underbrace{\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)}_{>0}$$

Entonces, es necesario que $a > 0$ para que sea definida positiva.
Consideremos:

B $a = -1$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (0\ 0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \leq 0$

5 Notemos que $A^tA = \|u\|_2^2 uu^t$. Entonces:

$$v^t B(t) v = v^t\left((1-t)I + t\|u\|_2^2 uu^t\right)v = \underbrace{\overbrace{(1-t)}^{\geq 0}}_{\geq 0}\overbrace{\|v\|_2^2}^{>0} + \overbrace{t}^{\geq 0}\,\overbrace{\|u\|_2^2}^{>0}\overbrace{(u^tv)^2}^{\geq 0}$$

Sin embargo, notemos que si $t = 1$ y $u^tv = 0$ entonces la matriz no es definida positiva. Consideremos:

$t = 1$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \leq 0$

3) Ⓐ Demostrémoslo por inducción. Notemos que $H_1^t = (1)$ así que $H_1 H_1^t = (1)(1) = (1) = I_1$. Veamos ahora para $H_{2n}$ asumiendo que $H_n$ es ortogonal.

$$H_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix} \Rightarrow H_{2n}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_n^t & H_n^t \\ H_n^t & -H_n^t \end{pmatrix}$$

$$\therefore H_{2n} H_{2n}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_n^t & H_n^t \\ H_n^t & -H_n^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2H_nH_n^t & H_nH_n^t - H_nH_n^t \\ H_nH_n^t - H_nH_n^t & +2H_nH_n^t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Análogamente se prueba lo mismo para $H_{2n}^t H_{2n}$. Por lo tanto, $H_n$ es ortogonal para todo $n$ potencia de 2.

Ⓑ Notemos que $H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$H_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Está rotando, pero no en la misma dirección. No puede escribirse como $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ así que no es una rotación de Givens.

Sin embargo, notemos que es una reflexión de Householder:

$$u = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 u = -u$$

$$H_2 v = v$$

Son iguales?

Lo saqué usando que $v \in Nu(H_2 - I)$ y $u \perp v$.

$\cancel{H_2 = I =}$ $(I - H_2)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \overset{?}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ 0 & (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-1 \end{pmatrix}$ ②

?

$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore (\sqrt{2}-1)v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$u = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ justificar mejor!!

OK

respecto de qué recta refleja?