Parciales Resueltos de Métodos Numéricos

Federico Yulita

Primer Cuatrimestre, 2020

Esta materia la cursé con Isabel Méndez Díaz como profesora de las teóricas; en los talleres con Federico Pousa como JTP, Juan Manuel Perez como Ayudante de Primera y Nicolás Mastropasqua y Nicolás San Martín como Ayudantes de Segunda; y en las prácticas con Daniel Acevedo como JTP, Nestor Masnatta como Ayudante de Primera y Gustavo Hurovich y Gian Franco Lancioni como Ayudantes de Segunda. Si querés ver el resto de mis apuntes los podés encontrar en mi blog. Los ejercicios con un asterisco (*) son los que resolvimos en clase.

Índice

1. Primer Parcial Segundo Cuatrimestre, 2018

1.1. Ejercicio 1

Sean $m, n, s \in \mathbb{N}$ y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Tenemos un producto de matrices $C = AB$ del que sabemos los siguiente hechos:

- $A = \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = \mathbb{R}^{n\times s}$.
- $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\dagger$, $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\dagger$ y $Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger$.
- $\dim(\mathrm{Nu}(C)) = \dim(\mathrm{Im}(C)) = 2$.

(a) Hallar los valores de m, n y s.

(b) Probar que si $\mathrm{Nu}(A) = \{0\}$ entonces $\mathrm{Nu}(B) = \mathrm{Nu}(AB)$.

(c) Hallar el rango de B.

1.1.1. (a)

Ya que $e_1 \in \mathbb{R}^3$ y $Ae_1 \in \mathbb{R}^3$ entonces $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Por lo tanto, $m = n = 3$. Por teorema de la dimensión sabemos que $s = \dim(\mathrm{Im}(C)) + \dim(\mathrm{Nu}(C))$, ya que $C \in \mathbb{R}^{3\times s}$. Entonces, $s = 4$.

1.1.2. (b)

Notemos que $\forall v \in \mathrm{Nu}(B) \implies v \in \mathrm{Nu}(AB)$. Esto vale ya que si $v \in \mathrm{Nu}(B)$ entonces $Bv = 0$. Por lo tanto, $ABv = 0$ y $v \in \mathrm{Nu}(AB)$. Veamos entonces que $\nexists v \in \mathrm{Nu}(AB) \wedge v \notin \mathrm{Nu}(B)$. Tomemos $y = Bv$. Como $v \notin \mathrm{Nu}(B)$ entonces $y \neq 0$. Notemos:

$$\begin{aligned} ABv &= Ay \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $y \in \mathrm{Nu}(A)$. Sin embargo, como $\mathrm{Nu}(A) = \{0\}$ esto es absurdo. Entonces, demostramos que $\nexists v \in \mathrm{Nu}(AB) \wedge v \notin \mathrm{Nu}(B)$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(B) = \mathrm{Nu}(AB)$.

1.1.3. (c)

Sabemos que $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. También, como $\mathrm{Nu}(A) = \{0\}$ sabemos que $\mathrm{Nu}(B) = \mathrm{Nu}(AB)$. Sabemos que $\mathrm{Nu}(AB) = 2$, asi que $\mathrm{Nu}(B) = 2$. Ya que $\dim(B) = 4$ entonces por teorema de la dimensión $\mathrm{rg}(B) = 2$.

1.2. Ejercicio 2

Notemos $w_{(k)}$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, a algún vector en $\mathbb{R}^n$ para cual $\left(w_{(k)}\right)_i = 0$ si $i \leqslant k$, y $\left(w_{(k)}\right)_i \neq 0$ si $i > k$, es decir, las primeras k componentes de $w_{(k)}$ son nulas y las restantes $n - k$ no lo son.

(a) Para cualquier $n \geqslant 2$, $0 \leqslant l < n$ y $0 < m \leqslant n$, probar que la matriz $v_{(l)} z^\dagger_{(m)}$ tiene factorización LU sin pivoteo si y solo si $l \leqslant m$.

(b) Para el caso $n \geqslant 3$ y $l > m$, hallar dos factorizaciones LU distintas con pivoteo de $v_{(l)} z^\dagger_{(m)}$.

1.2.1. (a)

Para que una matriz admita factorización LU sin pivoteo es necesario que admita eliminación gaussiana sin pivoteo. Esto significa que al triangular queden todos ceros debajo de la diagonal. Veamos cómo se ve la matriz:

$$\begin{aligned} v_{(l)} z_{(m)}^{\dagger} &= \begin{pmatrix} 0_{l\times 1} \\ \tilde{v}_{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{m\times 1}^{\dagger} & \tilde{z}_{(m)}^{\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_{l\times m} & 0_{l\times(n-m)} \\ 0_{(n-l)\times m} & \tilde{v}_{(l)} \tilde{z}_{(m)}^{\dagger} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\tilde{v}_{(l)} \in \mathbb{R}^{n-l}$ y $\tilde{z}_{(m)} \in \mathbb{R}^{n-m}$ son los vectores $v_{(l)}$ y $z_{(m)}$ sin los ceros. Notemos que entonces $\tilde{v}_{(l)}\tilde{z}_{(m)}^{\dagger} \in \mathbb{R}^{(n-l)\times(n-m)}$ con elementos no nulos. Si $l > m$ entonces $\tilde{v}_{(l)}\tilde{z}_{(m)}^{\dagger}$ es una matriz "horizontal" (que tiene más columnas que filas) y entonces no va a poder diagonalizarse sin pivoteo ya que al recorrer la diagonal va a llegar un punto donde lleguemos a la $(m+1)$-ésima columna que va a tener un cero en la diagonal, $l-m-1$ ceros debajo de la diagonal y luego $n-l$ términos no nulos que no van a poder eliminarse triangulando (porque hay un cero en la diagonal). En cambio si $l \leqslant m$ entonces $\tilde{v}_{(l)}\tilde{z}_{(m)}^{\dagger}$ es una matriz "vertical" (que tiene más filas que columnas) y entonces puede diagonalizarse sin pivoteo ya que al llegar a la $(l+1)$-ésima columna esta va a tener un coeficiente no nulo en la diagonal, $m-l-1$ coeficientes no nulos por encima de la diagonal y $n-m$ coeficientes no nulos por debajo. Los términos por encima de la diagonal no molestan y los que están debajo pueden diagonalizarse con el coeficiente no nulo de la diagonal.

1.2.2. (b)

Este ejercicio es una poronga. Es más pictórico que nada y no refleja ningún tipo de comprensión de algún concepto relevante de la materia. No se qué pensaban los docentes cuando hicieron este ejercicio. Mirá lo que puse en el inciso anterior. Es un asco, súper palabroso para decir algo que solo refleja que supe ver qué forma tiene la matriz.

1.3. Ejercicio 3

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible (no necesariamente simétrica), $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Probar que $\lambda A^{\dagger} A$ es definida positiva si y solo si $\lambda > 0$.

(b) Probar que si $\lambda > 0$ entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda A^{\dagger} A & A^{\dagger} \\ A & \frac{2\left(\mathbb{I}+uu^{\dagger}\right)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

es simétrica definida positiva.

1.3.1. (a)

Notemos:

$$\begin{aligned} x^{\dagger}\left(\lambda A^{\dagger} A\right) x &= \lambda\,(Ax)^{\dagger}\,(Ax) \\ &= \lambda \parallel Ax \parallel^{2} \end{aligned}$$

Como A es inversible sabemos que $Ax \neq 0\, \forall x \neq 0$ así que es definida positiva si y solo si $\lambda > 0$.

1.3.2. (b)

Tomemos $v^\dagger = \begin{pmatrix} x^\dagger & y^\dagger \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^{2n}$, $v \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Notemos que x e y pueden ser nulos pero no ambos al mismo tiempo. Entonces:

$$
\begin{aligned}
v^\dagger \begin{pmatrix} \lambda A^\dagger A & A^\dagger \\ A & \frac{2(\mathbb{I}+uu^\dagger)}{\lambda} \end{pmatrix} v &= \begin{pmatrix} x^\dagger & y^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda A^\dagger A & A^\dagger \\ A & \frac{2(\mathbb{I}+uu^\dagger)}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^\dagger \lambda A^\dagger A + y^\dagger A & x^\dagger A^\dagger + \frac{2}{\lambda} y^\dagger \left(\mathbb{I} + uu^\dagger\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\lambda > 0 \rightarrow &= \underbrace{x^\dagger \lambda A^\dagger A x}_{\geqslant 0} + y^\dagger A x + x^\dagger A^\dagger y + \frac{2}{\lambda} y^\dagger \left(\mathbb{I} + uu^\dagger\right) y \\
&\geqslant 2 y^\dagger A x + \frac{2}{\lambda} \underbrace{y^\dagger y}_{\geqslant 0} + \frac{2}{\lambda} y^\dagger u u^\dagger y \\
&\geqslant 2 y^\dagger A x + \frac{2}{\lambda} \underbrace{\left(y^\dagger u\right)^2}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant 2 y^\dagger A x
\end{aligned}
$$

Para demostrar que la matriz es definida positiva veamos que es simétrica y que admite factorización de Cholesky. Que es simétrica es fácil de ver a simple vista. Veamos que existen $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangulares inferiores tales que:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda A^\dagger A & A^\dagger \\ A & \frac{2(\mathbb{I}+uu^\dagger)}{\lambda} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^\dagger & L_2^\dagger \\ 0 & L_3^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_1 L_1^\dagger & L_1 L_2^\dagger \\ L_2 L_1^\dagger & L_2 L_2^\dagger + L_3 L_3^\dagger \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Notemos que como $\lambda > 0$ entonces $\lambda A^\dagger A$ e simétrica definida positiva. Por lo tanto, tiene factorización de Cholesky $L_1 L_1^\dagger$. De allí se puede despejar L_2 usando que $A^\dagger = L_1 L_2^\dagger$, ya que sabemos que L_1 es no singular porque proviene de la factorización de Cholesky de $\lambda A^\dagger A$. Notemos:

$$
\frac{2\left(\mathbb{I} + uu^\dagger\right)}{\lambda} - L_2 L_2^\dagger = L_3 L_3^\dagger
$$

Llamemos a esta matriz B. Notemos que B es simétrica, así que veamos que es definida positiva:

$$
\begin{aligned}
x^\dagger \left(\frac{2\left(\mathbb{I} + uu^\dagger\right)}{\lambda} - L_2 L_2^\dagger \right) x &= x^\dagger \frac{2\left(\mathbb{I} + uu^\dagger\right)}{\lambda} x - x^\dagger L_2 L_2^\dagger x \\
&= \frac{2}{\lambda} \parallel x \parallel^2 + \frac{2}{\lambda} \left(x^\dagger u\right)^2 - x^\dagger L_2 L_2^\dagger x
\end{aligned}
$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
x^{\dagger} L_2 L_2^{\dagger} x &= x^{\dagger}\left(L_1^{-1} A^{\dagger}\right)^{\dagger}\left(L_1^{-1} A^{\dagger}\right) x \\
&= x^{\dagger} A L_1^{-1\dagger} L_1^{-1} A^{\dagger} x \\
&= x^{\dagger} A\left(L_1 L_1^{\dagger}\right)^{-1} A^{\dagger} x \\
&= x^{\dagger} A\left(\lambda A^{\dagger} A\right)^{-1} A^{\dagger} x \\
&= \frac{1}{\lambda} x^{\dagger} A A^{-1} A^{\dagger -1} A^{\dagger} x \\
&= \frac{\| x \|^2}{\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore x^{\dagger}\left(\frac{2\left(\mathbb{I}+u u^{\dagger}\right)}{\lambda}-L_2 L_2^{\dagger}\right) x &= \frac{2}{\lambda} \| x \|^2 + \frac{2}{\lambda}\left(x^{\dagger} u\right)^2 - \frac{\| x \|^2}{\lambda} \\
&= \underbrace{\frac{\| x \|^2}{\lambda}}_{>0} + \underbrace{\frac{2}{\lambda}\left(x^{\dagger} u\right)^2}_{>0} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

Entonces, B es simétrica definida positiva y existe su factorización de Cholesky $B = L_3 L_3^{\dagger}$.

1.4. Ejercicio 4

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Hallar un vector $u \in \mathbb{R}^3$ tal que si $H = \mathbb{I} - \frac{2uu^{\dagger}}{u^{\dagger}u}$ resulte $HA = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$, es decir $(HA)_{12} = (HA)_{32} = 0$.

(b) Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y simétrica, calcular Q^n para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y antisimétrica, calcular Q^n para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una reflexión de Householder y $G(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una rotación de Givens de ángulo θ. Calcular H^{2018} y G^{2018}.

(e) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $A = QR$ una factorización QR de A. Hallar una factorización LU (L con unos en la diagonal) de $A^{\dagger}A$.

1.4.1. (a)

Notemos:

$$
H = \begin{pmatrix} h_1^{\dagger} \\ h_2^{\dagger} \\ h_3^{\dagger} \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore \begin{cases} (HA)_{12} = h_1^{\dagger} a_2 \\ (HA)_{32} = h_3^{\dagger} a_2 \end{cases}
$$

Queremos que h_1 y h_2 sean vectores ortogonales a $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notemos:

$$
h_i = e_i - \frac{2u^{(i)}}{u^{\dagger}u} u
$$

$$\begin{aligned}
h_i^\dagger a_j &= e_i^\dagger a_j - \frac{2u^{(i)}}{u^\dagger u} u^\dagger a_j \\
&= a_j^{(i)} - \frac{2u^{(i)}}{u^\dagger u} u^\dagger a_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2u^{(i)}}{u^\dagger u} u^\dagger a_j = a_j^{(i)}$$

Entonces:

$$\begin{cases} \frac{2u^{(1)}}{u^\dagger u} u^\dagger a_2 = 2 \\ \frac{2u^{(3)}}{u^\dagger u} u^\dagger a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{u^{(1)}}{u^{(3)}} = 2$$

Propongamos:

$$u = \begin{pmatrix} 2a \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{4a}{5a^2 + b^2} (5a + b) = 2$$

$$\therefore 10a^2 + 4ab - 2b^2 = 0$$

Tomemos $a = 1$:

$$10 + 4b - 2b^2 = 0$$

$$\therefore b = \sqrt{6} + 1$$

Finalmente, obtenemos que $u = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lo chequee en Mathematica y da lo que tiene que dar. Reitero, no se que pensaban los docentes cuando armaron este parcial.

1.4.2. (b)

Como Q es ortogonal sabemos que $Q^{-1} = Q^\dagger$ y como es simétrica sabemos que $Q^\dagger = Q$. Por lo tanto:

$$Q^n = \begin{cases} Q & n \nmid 2 \\ \mathbb{I} & n \mid 2 \end{cases}$$

1.4.3. (c)

Como Q es ortogonal sabemos que $Q^{-1} = Q^\dagger$ y como es antisimétrica sabemos que $Q^\dagger = -Q$. Por lo tanto:

$$Q^n = \begin{cases} Q & n \equiv 1 \mod (4) \\ -\mathbb{I} & n \equiv 2 \mod (4) \\ -Q & n \equiv 3 \mod (4) \\ \mathbb{I} & n \equiv 0 \mod (4) \end{cases}$$

1.4.4. (d)

Sabemos que tanto las matrices de Householder como las de Givens son matrices ortogonales. Además, las matrices de Householder son simétricas así que podemos usar lo que vimos en el inciso (b) para concluir que $H^{2018} = \mathbb{I}$. Las matrices de Givens son antisimétricas, así que podemos usar lo que vimos en el inciso (c) para concluir que $G^{2018} = -\mathbb{I}$.

1.4.5. (e)

Notemos

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= R^\dagger Q^\dagger Q R \\ &= R^\dagger R \end{aligned}$$

Ya que R es una matriz triangular superior entonces $R^\dagger$ es triangular inferior. Tomemos entonces:

$$\begin{cases} L = R^\dagger D^{-1} \\ U = DR \end{cases}$$

donde D son los valores de la diagonal de R. Esto lo hacemos para que L tenga unos en la diagonal y es válido porque sabemos que R no tiene ceros en la diagonal.

2. Segundo Parcial Primer Cuatrimestre, 2019

2.1. Ejercicio 1

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que cumple:

$$A\left(A-\mathbb{I}\right)^2 = 0,\ \left(A-\mathbb{I}\right)^2 \neq 0,\ A\left(A-\mathbb{I}\right) \neq 0$$

(a) Probar que si λ es autovalor de A entonces $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

(b) Probar que A es no diagonalizable.

(c) Para todo $k \in \mathbb{N}\, k \geqslant 3$, expresar A^k como una combinación lineal de A y A^2.

(d) Para $n = 3$ dar un ejemplo de una matriz A con las condiciones dadas.

2.1.1. (a)

Consideremos v un autovector de A con autovalor asociado λ. Notemos:

$$\begin{aligned} A\left(A-\mathbb{I}\right)^2 v &= A\left(A-\mathbb{I}\right)\left(A-\mathbb{I}\right) v \\ &= A\left(A-\mathbb{I}\right)\left(Av - v\right) \\ &= A\left(A-\mathbb{I}\right) v \left(\lambda - 1\right) \\ &= Av\left(\lambda-1\right)^2 \\ &= \lambda\left(\lambda-1\right)^2 v \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

2.1.2. (b)

A es diagonalizable si y solo si sus autovectores forman una base de $\mathbb{R}^n$. Entonces, queremos ver que los autovectores de A no forman una base. Sabemos que los únicos dos autovalores de A son $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$, y además sabemos que los autovectores asociados a $\lambda = 1$ son linealmente independientes a los autovectores asociados a $\lambda = 0$.

2.1.3. (c)

$$\begin{aligned}
A\left(A - \mathbb{I}\right)^2 &= A\left(A^2 - 2A + \mathbb{I}\right) \\
&= A^3 - 2A^2 + A \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore A^3 = 2A^2 - A$$

$$\begin{aligned}
\therefore A^4 &= 2A^3 - A^2 \\
&= 4A^2 - 2A - A^2 \\
&= 3A^2 - 2A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A^5 &= 3A^3 - 2A^2 \\
&= 4A^2 - 3A
\end{aligned}$$

Entonces, propongamos $A^k = (k-1)\,A^2 - (k-2)\,A\,\forall k \geqslant 3$. Demostremos esto por inducción. Para $k = 3$ ya vimos que es válido,así que tomemos $A^k = (k-1)\,A^2 - (k-2)\,A$ y veamos que $A^{k+1} = kA^2 - (k-1)\,A$:

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k A \\
&= \big((k-1)\,A^2 - (k-2)\,A\big)\,A \\
&= (k-1)\,A^3 - (k-2)\,A^2 \\
&= (k-1)\left(2A^2 - A\right) - (k-2)\,A^2 \\
&= \cancel{2}kA^2 - kA - \cancel{2A^2} + A - \cancel{kA^2} + \cancel{2A^2} \\
&= kA^2 - (k-1)\,A
\end{aligned}$$

2.1.4. (d)

Propongamos A diagonal superior para simplificar las cuentas. Ya que sabemos que sus autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$ entonces propongamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya que la diagonal de una matriz triangular son sus autovalores. Notemos:

$$
\begin{aligned}
A\left(A-\mathbb{I}\right)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac-b \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\left(A-\mathbb{I}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(A-\mathbb{I}\right)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac-b \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

Entonces, tomemos $a = 1$ y $b = c = 0$:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore A\left(A-\mathbb{I}\right)^2 = 0,\ A\left(A-\mathbb{I}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,\ \left(A-\mathbb{I}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0
$$

A cumple con las condiciones de la consigna.

2.2. Ejercicio 2

Sea $A = U\Sigma V^\dagger$ una descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, donde $\operatorname{rg}(A) = r$. Sea:

$$
U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix},\ \Sigma = \operatorname{diag}\left(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\right)
$$

(a) Probar que $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i v_i v_i^\dagger$. *Sugerencia:* Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = B$ si y solo si $Ax = Bx\, \forall x \in \Gamma$ una base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Sea $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ definimos $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\dagger$. Probar que $\parallel A - A_k \parallel_2 = \sigma_{k+1}$.

2.2.1. (a)

$$\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\dagger \\ v_2^\dagger \\ \vdots \\ v_n^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\dagger
\end{aligned}$$

2.2.2. (b)

$$\begin{aligned}
A - A_k &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\dagger - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\dagger \\
&= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \| A - A_k \|_2 &= \max_{x \in \mathbb{R}^n / x \neq 0} \frac{\| (A - A_k)\, x \|_2}{\| x \|_2} \\
&= \max_{x \in \mathbb{R}^n / x \neq 0} \frac{\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\dagger x \|_2}{\| x \|_2}
\end{aligned}$$

Tomemos:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

ya que las columnas de V forman una base de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\| A - A_k \|_2 &= \max_{\alpha_j \in \mathbb{R}} \frac{\| \sum_{i=k+1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sigma_i u_i v_i^\dagger v_j \|_2}{\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \|_2} \\
&= \max_{\alpha_j \in \mathbb{R}} \frac{\| \sum_{i=k+1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sigma_i u_i \delta_{ij} \|_2}{\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \|_2} \\
&= \max_{\alpha_j \in \mathbb{R}} \frac{\| \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i \sigma_i u_i \|_2}{\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \|_2}
\end{aligned}$$

Ya que $\sigma_i \geqslant \sigma_{i+1}\, \forall i$ entonces conviene maximizar el elemento asociado a σ_{k+1}. Por lo tanto, tomemos $\alpha_j = \delta_{j(k+1)}$:

$$\begin{aligned}
\| A - A_k \|_2 &= \frac{\| \sigma_{k+1} u_{k+1} \|_2}{\| v_{k+1} \|_2} \\
\| u_i \| = \| v_i \| = 1\, \forall i \rightarrow \quad &= |\sigma_{k+1}| \\
\sigma_i \geqslant 0\, \forall i \rightarrow \quad &= \sigma_{k+1}
\end{aligned}$$

2.3. Ejercicio 3

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$ y $\mu \in \mathbb{R}$ una constante positiva. Se desea resolver las ecuaciones normales $A^\dagger Ax = A^\dagger b$ mediante el siguiente esquema iterativo dado un $x^{(0)}$ inicial:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger \left(b - Ax^{(k)}\right),\ k \in \mathbb{N}_0$$

(a) Probar que si el esquema iterativo converge resuleve el problema de las ecuaciones normales. Determinar cuál es la matriz que gobierna la iteración.

(b) Sea $\operatorname{rg}(A) = r \leqslant n$ probar que para cualquier $\mu > 0$ el esquema converge si y solo si $r = n$. *Sugerencia:* Considerando $A = U\Sigma V^\dagger$ su descomposición en valores singulares reescribir la matriz que gobierna la iteración como $VDV^\dagger$ (con D diagonal) y luego calcular sus autovalores.

2.3.1. (a)

Notemos:

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger \left(b - Ax^{(k)}\right)\\
&= x^{(k)} - \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger Ax^{(k)} - \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger b\\
&= \underbrace{\left(\mathbb{I} - \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger A\right)}_{=T} x^{(k)} \underbrace{- \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger b}_{=c}\\
&= Tx^{(k)} + c
\end{aligned}$$

Entonces, como la sucesión tiene la forma lineal sabemos que si converge entonces converge a la solución del sistema. La matriz que gobierna la iteración es $T = \mathbb{I} - \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger A$.

2.3.2. (b)

Usemos la sugerencia y consideremos $A = U\Sigma V^\dagger$ su descomposición en valores singulares. Entonces, sabemos que $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz que diagonaliza la matriz $A^\dagger A$. Por lo tanto, $A^\dagger A = VDV^\dagger$ donde D es una matriz diagonal con los autovalores $\lambda_i = \sigma_i^2$ en la diagonal. Ya que A es de rango r entonces $D = \operatorname{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La cantidad de ceros en la diagonal de D es $n - r$. Notemos:

$$\begin{aligned}
T &= \mathbb{I} - \left(A^\dagger A + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} A^\dagger A\\
&= \mathbb{I} - \left(VDV^\dagger + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} VDV^\dagger\\
&= \mathbb{I} - \left(VDV^\dagger + \mu V\mathbb{I}V^\dagger\right)^{-1} VDV^\dagger\\
&= \mathbb{I} - \left(V\left(D + \mu\mathbb{I}\right)V^\dagger\right)^{-1} VDV^\dagger\\
&= \mathbb{I} - V\left(D + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} V^\dagger VDV^\dagger\\
&= \mathbb{I} - V\left(D + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} DV^\dagger\\
&= V\left(\mathbb{I} - \left(D + \mu\mathbb{I}\right)^{-1} D\right)V^\dagger\\
&= V^\dagger \operatorname{diag}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}, \ldots, 1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_r + \mu}, 1, \ldots, 1\right)V^\dagger
\end{aligned}$$

La cantidad de unos de en la matriz diagonal es $n - r$. Notemos entonces que los primeros r autovalores son menores que 1 y positivos, ya que $0 < \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu} < 1$ debido a que $\mu > 0$ y que $\lambda_i > 0\, \forall i$. Para que la sucesión converja es necesario que $\rho(T) < 1$ y esto es lo mismo que pedir que el valor absoluto del mayor autovalor sea menor que 1. Entonces, notemos que si $r = n$ entonces esto se cumple pero si $r < n$ esto no se cumple, ya que hay $n - r$ autovalores de valor 1.

3. Primer Parcial Primer Cuatrimestre, 2019

3.1. Ejercicio 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Demostrar las que sean verdaderas, encontrar un contraejemplo para las que sean falsas.

(a) Si $A^2 + \mathbb{I} = 0$ entonces n es par.

(b) Si $A^2 + A - \mathbb{I} = 0$ entonces A es inversible.

(c) Si $\operatorname{Tr}\left(A^\dagger A\right) = 0$ entonces $A = 0$.

(d) Si $\operatorname{Nu}(A) \neq \{0\}$ entonces A es nilpotente.

(e) $\operatorname{Nu}(A) = \operatorname{Nu}\left(A^\dagger A\right)$.

3.1.1. (a)

Verdadero. Si $A^2 + \mathbb{I} = 0$ entonces $A^2 = -\mathbb{I}$. Notemos:

$$\begin{aligned}\det\left(A^2\right) &= \det^2(A)\\ &= (-1)^n \det(\mathbb{I})\\ &= (-1)^n\end{aligned}$$

Entonces, para que $\det(A) \in \mathbb{R}$ es necesario que n sea par.

3.1.2. (b)

Verdadero. Sabemos que $A(A + \mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Es claro entonces que la inversa de A es $A + \mathbb{I}$.

3.1.3. (c)

Verdadero. Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{Tr}\left(AA^\dagger\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

Ya que $a_{ij} \in \mathbb{R}$ entonces la única forma de que la traza sea nula es si $a_{ij} = 0\,\forall i, j$.

3.1.4. (d)

Falso. Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{Nu}(A) = \langle (0, 1)\rangle$$

Notemos que $A^n = A\,\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, A no es nilpotente.

3.1.5. (e)

Falso. Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{Nu}(A) = \langle (1,0) \rangle$$

Notemos:

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{Nu}\left(A^\dagger A\right) = \langle (0,1) \rangle$$

$$\therefore \operatorname{Nu}(A) \neq \operatorname{Nu}\left(A^\dagger A\right)$$

3.2. Ejercicio 2

Normalmente, realizamos la eliminación gaussiana *hacia abajo* para producir una matriz triangular superior U a partir de una matriz A. Supongamos que eliminamos *hacia arriba* para convertir A en una matriz triangular inferior L. Por ejemplo, para la siguiente matriz A:

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

donde llamamos $A^{(k)}$ a la matriz luego de haber triangulado k columnas comenzando desde la última y desde abajo hacia arriba.

(a) Para cualquier matriz A, construir la matriz $\hat{M}_k$ de forma tal que $A^{(k+1)} = \hat{M}_k A^{(k)}$. Es decir, $\hat{M}_k$ pone en ceros los valores arriba de la diagonal en la k-ésima columna. ¿Cuál es la inversa de $\hat{M}_k$?

(b) Para la matriz A del ejemplo, hallar la factorización $A = UL$, con L triangular inferior y U triangular superior con unos en la diagonal.

(c) Determinar y justificar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Una matriz inversible tiene factorización UL si y solo si sus submatrices principales son inversibles".

3.2.1. (a)

Como $A^{(k)}$ es la matriz A con las últimas k columnas diagonalizadas queremos que $\hat{M}_k$ diagonalice la $(n-k)$-ésima columna de $A^{(k)}$. Por lo tanto, todas las columnas de $\hat{M}_k$ son los vectores canónicos menos la columna $n-k$. Esta columna, debe tener elementos $-\frac{a^{(k)}_{i(n-k)}}{a^{(k)}_{(n-k)(n-k)}}$ para las posiciones $i < n-k$, 1 para la posición $n-k$ y 0 para el resto. Por lo tanto, podemos definir $\hat{M}_k = \mathbb{I} - m_k e^\dagger_{n-k}$, donde m_k es un vector con $\frac{a^{(k)}_{i(n-k)}}{a^{(k)}_{(n-k)(n-k)}}$ para las posiciones $i < n-k$ y 0 para las posiciones $i \geqslant n-k$.

Propongamos entonces $\hat{M}_k^{-1} = \mathbb{I} + m_k e^\dagger_{n-k}$. Comprobémoslo:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_k^{-1}\hat{M}_k &= \left(\mathbb{I} + m_k e^\dagger_{n-k}\right)\left(\mathbb{I} - m_k e^\dagger_{n-k}\right) \\
&= \mathbb{I} \underbrace{-m_k e^\dagger_{n-k} + m_k e^\dagger_{n-k}}_{=0} - m_k \underbrace{e^\dagger_{n-k} m_k}_{=0} e^\dagger_{n-k} \\
&= \mathbb{I}
\end{aligned}$$

3.2.2. (b)

$$\begin{aligned}
A &= A^{(0)} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A^{(1)} &= \hat{M}_0 A^{(0)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A^{(2)} &= \hat{M}_1 A^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore L &= \hat{M}_1 \hat{M}_0 A \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= U^{-1} A
\end{aligned}$$

Hallemos U:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.3. (c)

Falso. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallemos su factorización UL:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \hat{M}_0 A^{(0)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \hat{M}_1 A^{(1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore U^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la factorización UL de A es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que A es inversible, ya que $\det(A) = -1$, pero que sus submatrices principales no lo son, ya que son:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_{1\times 1} = 0$$

3.3. Ejercicio 3

(a) Probar que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva si y solo si $P^\dagger AP$ es definida positiva, con P una matriz de permutación.

(b) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Probar que si $a > \sqrt{2}$ entonces A es definida positiva.
- Para $a > \sqrt{2}$ escribir la factorización de Cholesky de A.

3.3.1. (a)

Notemos:

$$\begin{aligned} x^\dagger P^\dagger APx &= (Px)^\dagger A (Px) \\ y = Px \rightarrow &= y^\dagger Ay \end{aligned}$$

Como P es una matriz de permutación entonces Px es otro vector con los elementos de x cambiados de posición. Por este motivo, resulta que $\forall y \in \mathbb{R}^n \exists x \in \mathbb{R}^n \,/\, y = Px$. Entonces, A es definida positiva si y solo si $P^\dagger AP$ es definida positiva.

3.3.2. (b)

Para ver que A es definida positiva podemos ver que tiene factorización de Cholesky. Para esto, podemos ver si A es simétrica (lo es) y si tiene factorización LU, ya que entonces se puede obtener una factorización LDL y de ahí una factorización de Cholesky. Sabemos que una matriz tiene factorización LU si y solo si todos sus menores principales son no nulos. Entonces veamos eso. Para que su primer menor principal sea no nulos es necesario que $a > 0$. Para su segundo menor principal es necesario que $a > 1$. Finalmente, para que su tercer menor principal es necesario que:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\left(a^2 - 1\right) - a \\ &= a^3 - 2a \\ &> 0 \end{aligned}$$

Entonces, $a > \sqrt{2}$.

Veamos la factorización de Cholesky para $a > \sqrt{2}$:

$$l_{11} = \sqrt{a}$$

$$\therefore \begin{cases} l_{21} = \frac{1}{\sqrt{a}} \\ l_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore l_{22} = \sqrt{a - \frac{1}{a}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2 - 1}{a}}$$

$$\therefore l_{32} = \sqrt{\frac{a}{a^2 - 1}}$$

$$\therefore l_{33} = \sqrt{a - \frac{a}{a^2 - 1}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^3 - 2a}{a^2 - 1}}$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \sqrt{\frac{a^2-1}{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{a}{a^2-1}} & \sqrt{\frac{a^3-2a}{a^2-1}} \end{pmatrix}$$

Comprobemos que esta matriz es correcta:

$$\begin{aligned} LL^\dagger &= \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \sqrt{\frac{a^2-1}{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{a}{a^2-1}} & \sqrt{\frac{a^3-2a}{a^2-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{a^2-1}{a}} & \sqrt{\frac{a}{a^2-1}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{a^3-2a}{a^2-1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

3.4. Ejercicio 4

Sea $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal con columnas $q_i \in \mathbb{R}^n$.

(a) Hallar una reflexión de Householder $H_v = \mathbb{I} - \frac{2vv^\dagger}{v^\dagger v}$ tal que $H_v q_1 = e_1$. Verificar que se cumple la igualdad.

(b) Probar que la matriz $H_v Q$ es de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$ con $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ una matriz ortogonal. ¿De qué forma es $H_v Q$ si $v = q_n + e_1$?

3.4.1. (a)

Suponiendo que $q_1 \neq e_1$ propongo:

$$v = q_1 - e_1$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{2vv^\dagger}{v^\dagger v} &= 2\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_1)^\dagger}{(q_1-e_1)^\dagger(q_1-e_1)} \\
&= 2\frac{q_1q_1^\dagger - \tilde{q}_1e_1^\dagger - e_1q_1^\dagger + e_1e_1^\dagger}{q_1^\dagger q_1 - \tilde{q}_1^\dagger e_1 - e_1^\dagger q_1 + e_1^\dagger e_1} \\
&= \frac{q_1q_1^\dagger - q_1e_1^\dagger - e_1q_1^\dagger + e_1e_1^\dagger}{1-q_1^\dagger e_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore H_vq_1 &= \left(\mathbb{I} - \frac{2vv^\dagger}{v^\dagger v}\right)q_1 \\
&= \left(\mathbb{I} - \frac{q_1q_1^\dagger - q_1e_1^\dagger - e_1q_1^\dagger + e_1e_1^\dagger}{1-q_1^\dagger e_1}\right)q_1 \\
&= q_1 - \frac{q_1q_1^\dagger q_1 - q_1e_1^\dagger q_1 - e_1q_1^\dagger q_1 + e_1e_1^\dagger q_1}{1-q_1^\dagger e_1} \\
&= q_1 - \frac{q_1 - q_1e_1^\dagger q_1 - e_1 + e_1e_1^\dagger q_1}{1-q_1^\dagger e_1} \\
&= q_1 - (q_1-e_1)\underbrace{\frac{1-e_1^\dagger q_1}{1-q_1^\dagger e_1}}_{=1} \\
&= e_1
\end{aligned}
$$

3.4.2. (b)

$$
\begin{aligned}
H_vQ &= H_v\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} H_vq_1 & H_vq_2 & \dots & H_vq_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1 & H_vq_2 & \dots & H_vq_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Veamos que de $(H_vq_i)^{(0)} = 0\,\forall i > 1$:

$$
\begin{aligned}
H_vq_i &= q_i - \frac{q_1q_1^\dagger q_i - q_1e_1^\dagger q_i - e_1q_1^\dagger q_i + e_1e_1^\dagger q_i}{1-q_1^\dagger e_1} \\
q_1^\dagger q_i = 0 \rightarrow \quad &= q_i - (e_1-q_1)\frac{e_1^\dagger q_i}{1-q_1^\dagger e_1} \\
&= q_i - (e_1-q_1)\frac{q_i^{(0)}}{1-q_1^{(0)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore (H_vq_i)^{(0)} &= q_i^{(0)} - \cancel{\left(1-q_1^{(0)}\right)}\frac{q_i^{(0)}}{\cancel{1-q_1^{(0)}}} \\
&= q_i^{(0)} - q_i^{(0)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Entonces, demostramos que:

$$H_vQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\tilde{Q}$ es ortogonal porque H_v y Q son ortogonales, así que el producto debe serlo.

Si definiéramos $v = q_n + e_1$ entonces:

$$H_v = \mathbb{I} - \frac{q_n q_n^\dagger + q_n e_1^\dagger + e_1 q_n^\dagger + e_1 e_1^\dagger}{1 + q_n^\dagger e_1}$$

$$\therefore \begin{cases} H_v q_n = e_1 \\ (H_v q_i)^{(0)} = 0 \, \forall i \neq n \end{cases}$$

$$\therefore H_v Q = \begin{pmatrix} H_v q_1 & H_v q_2 & \dots & e_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore H_v Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{Q} & 0 \end{pmatrix}$$

4. Primer Parcial Segundo Cuatrimestre, 2019

4.1. Ejercicio 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que cumple $A^2 = A$ y sea $r = \mathrm{rg}(A)$:

(a) Probar que cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir como $x = s + t$ con $s \in \mathrm{Nu}(A)$ y $t \in \mathrm{Im}(A)$.

(b) Probar que $\mathrm{Nu}(A) \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$.

(c) Probar que existe una base $B = \{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av_i = v_i$ para todo $i \leqslant r$ y $Av_i = 0$ para todo $i > r$.

4.1.1. (a)

Como $t \in \mathrm{Im}(A)$ entonces $\exists \tilde{t} \in \mathbb{R}^n \,/\, t = A\tilde{t}$. Notemos que como $A^2 = A$ entonces $At = t$. Esto vale para todo $t \in \mathrm{Im}(A)$. Como $s \in \mathrm{Nu}(A)$ entonces $As = 0$. Entonces, si tomamos $x = s + t$ obtenemos que $Ax = t$. Entonces, tenemos $x = Ax + s$. Notemos que si $x \in \mathrm{Im}(A)$ entonces tenemos que $s = 0$ y $x = Ax$ (como habíamos visto antes) y si $x \in \mathrm{Nu}(A)$ entonces $t = 0$ y $x = s$. Entonces:

$$\begin{cases} t = Ax \\ s = (A - \mathbb{I})\, x \end{cases}$$

Veamos que $\nexists x \in \mathbb{R}^n \,/\, x \notin \mathrm{Im}(A) \wedge x \notin \mathrm{Nu}(A)$. Para eso veamos que $x \notin \mathrm{Nu}(A) \implies x \in \mathrm{Im}(A)$. Notemos que si demonstramos esto entonces también demonstramos por el contrapositivo que $x \notin \mathrm{Im}(A) \implies x \in \mathrm{Nu}(A)$. Tomemos $y = Ax$. Ya que $x \notin \mathrm{Nu}(A)$ entonces $y \neq 0$. Notemos:

$$\begin{aligned} Ay &= A^2 x \\ &= Ax \end{aligned}$$

$$\therefore x = y$$

Como $y \in \mathrm{Im}(A)$ y $x = y$ entonces $x \in \mathrm{Im}(A)$.

4.1.2. (b)

Consideremos $x \in \mathrm{Nu}\,(A) \cap \mathrm{Im}\,(A)$. Tomemos $v \in \mathbb{R}^n \,/\, Av = x$. Notemos:

$$\begin{aligned} Ax &= A^2 v \\ &= Av \\ &= x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $x \in \mathrm{Nu}\,(A) \cap \mathrm{Im}\,(A)$ entonces $x = 0$.

4.1.3. (c)

Ya que el rango de la matriz es r sabemos que $\dim(\mathrm{Im}\,(A)) = r$. Entonces, la base que queremos armar es una cuyos primeros vectores son los de la base de $\mathrm{Im}\,(A)$ y los siguientes son de la base de $\mathrm{Nu}\,(A)$. Estos vectores son linealmente independientes entre sí solo si $\mathrm{Im}\,(A) \oplus \mathrm{Nu}\,(A) = \mathbb{R}^n$. Ya que $\nexists x \in \mathbb{R}^n \,/\, x \notin \mathrm{Im}\,(A) \wedge x \notin \mathrm{Nu}\,(A)$ entonces sabemos que esto se cumple, por lo tanto existe esta base.

4.2. Ejercicio 2

Consideremos realizar la triangulación *hacia arriba* para convertir A en una matriz triangular superior U. Esta triangulación sin pivoteo se realiza por filas mediante combinaciones lineales de columnas. Por ejemplo, para la siguiente matriz A:

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

donde llamamos $A^{(k)}$ a la matriz luego de haber triangulado k filas comenzando desde la última hasta la primera. Mediante esta triangulación podemos llegar a la factorización $A = UL$, con L triangular inferior con unos en su diagonal.

(a) Para cualquier matriz A, construir la matriz $\hat{M}_k$ de forma tal que $A^{(k+1)} = A^{(k)}\hat{M}_k$. Es decir, $\hat{M}_k$ pone en cero los valores a la izquierda de la diagonal en la $(n-k)$-ésima fila, para $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. ¿Cuál es la inversa de $\hat{M}_k$? Justificar.

(b) Para la matriz A del ejemplo, hallar la factorización $A = UL$, con L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior.

(c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, con P una matriz de permutación definida como

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & i + j \neq n + 1 \end{cases}$$

Sea $B = PAP$ una matriz para la cual existe la factorización LU tradicional sin pivoteo $B = LU$. Hallar la factorización $A = UL$ (con unos en la diagonal de L).

4.2.1. (a)

Ya que $\hat{M}_k$ solo afecta a la $(n-k)$-ésima fila entonces el resto de las filas de $\hat{M}_k$ deben ser $e_i^\dagger$, $i \neq n-k$. Luego para la $(n-k)$-ésima fila queremos que cada elemento antes del $m_{(n-k)(n-k)}$ contenga $-\frac{a^{(k)}_{(n-k)i}}{a^{(k)}_{(n-k)(n-k)}}$, donde $i < n-k$ indica la columna. Entonces:

$$\hat{M}_k = \mathbb{I} - e_{n-k} m_k^\dagger$$

donde m_k es el vector que tiene los elementos $\frac{a^{(k)}_{(n-k)i}}{a^{(k)}_{(n-k)(n-k)}}$ para $i < n-k$ y 0 para $i \geqslant n-k$.

Como las filas de $\hat{M}_k$ son $e_i^\dagger \, \forall i \neq n-k$ entonces $\hat{M}_k^{-1}$ también, y como para la $(n-k)$-ésima fila tenemos $-\frac{a^{(k)}_{(n-k)j}}{a^{(k)}_{(n-k)(n-k)}}$ en cada columna $j < n-k$ entonces $\hat{M}_k^{-1}$ debe tener $\frac{a^{(k)}_{(n-k)j}}{a^{(k)}_{(n-k)(n-k)}}$ en cada columna $j < n-k$. Entonces:

$$\hat{M}_k^{-1} = \mathbb{I} + e_{n-k} m_k^\dagger$$

Comprobémoslo:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_k \hat{M}_k^{-1} &= \left(\mathbb{I} - e_{n-k} m_k^\dagger\right)\left(\mathbb{I} + e_{n-k} m_k^\dagger\right) \\
&= \mathbb{I} + \underbrace{e_{n-k} m_k^\dagger - e_{n-k} m_k^\dagger}_{=0} - \underbrace{e_{n-k} m_k^\dagger e_{n-k}}_{=0} m_k^\dagger \\
&= \mathbb{I}
\end{aligned}$$

El producto $e_{n-k} m_k^\dagger e_{n-k}$ da cero porque la $(n-k)$-ésima columnas de la matriz $e_{n-k} m_k^\dagger$ es nula y multiplicar por e_{n-k} nos devuelve esa columna.

4.2.2. (b)

Hagamos el proceso de triangulación de A escribiendo las matrices $\hat{M}_k$:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= A^{(0)} \hat{M}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{(2)} &= A^{(1)} \hat{M}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= U
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore U &= A^{(0)}\hat{M}_0\hat{M}_1 \\
&= A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= AL^{-1}
\end{aligned}
$$

Hallemos L:

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

4.2.3. (c)

Veamos qué forma tiene P considerando $n = 3$:

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Es básicamente la identidad con la diagonal al revés. Veamos cómo se comporta:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore PA = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, \; AP = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore PAP = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}
$$

Entonces P operado por izquierda refleja la matriz verticalmente y operado por derecha refleja la matriz horizontalmente. Entonces, PAP invierte la matriz A horizontalmente y verticalmente. Notemos además que $P^2 = 1$. Por lo tanto, $P\,(PAP)\,P = A$. Notemos que como U es triangular superior entonces PUP es triangular inferior y como L es triangular superior con unos en la diagonal entonces PLP es triangular superior con unos en la diagonal. Tomemos $A = U_A L_A$ y $B = L_B U_B$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
B &= PAP \\
&= PU_AL_AP \\
&= PU_APPL_AP \\
&= L_BU_B
\end{aligned}
$$

Quisiéramos tomar $L_B = PU_AP$ y $PL_AP = U_B$ porque las formas son correctas pero L_B tiene unos en la diagonal y PU_AP no. Para solucionar esto podemos tomar una matriz D que tenga los elementos de la diagonal de A en la diagonal. Entonces:

$$
\begin{cases}
U_A = PL_BPD^{-1} \\
L_A = DPU_BP
\end{cases}
$$

Notemos:

$$
\begin{aligned}
A &= U_AL_A \\
&= PL_BPD^{-1}DPU_BP \\
&= PL_BPPU_BP \\
&= PL_BU_BP \\
&= PBP
\end{aligned}
$$

Sabemos que existe D^{-1} porque A es inversible y, por lo tanto, no tiene ceros en la diagonal.

4.3. Ejercicio 3

(a) Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que A es definida positiva y B es no singular si y solo si $BAB^\dagger$ es definida positiva.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz definida positiva y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}$. Probar que B es definida positiva. ¿Cuánto vale $\mathrm{Tr}\,(B)$?

4.3.1. (a)

Notemos:

$$
\begin{aligned}
x^\dagger BAB^\dagger x &= \left(B^\dagger x\right)^\dagger A \left(B^\dagger x\right) \\
&> 0\, \forall x \neq 0
\end{aligned}
$$

Tomemos $B^\dagger x = y$. Entonces:

$$
y^\dagger Ay > 0\, \forall y \neq 0
$$

Si B es inversible entonces podemos asegurar que $B^\dagger x \neq 0$. Por lo tanto, $BAB^\dagger$ es definida positiva si y solo si A es definida positiva y B es no singular.

4.3.2. (b)

Consideremos una matriz D inversible. Como A es definida positiva entonces $DAD^\dagger$ también lo es. Si tomamos D como una matriz diagonal tal que $d_{ii} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ entonces:

$$
\begin{aligned}
DAD^{\dagger} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & \dots & \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{22}}} & \sqrt{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{\sqrt{a_{22}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{\sqrt{a_{nn}}} & \frac{a_{n2}}{\sqrt{a_{nn}}} & \dots & \sqrt{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} & \dots & \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}a_{nn}}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{22}a_{11}}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{\sqrt{a_{22}a_{nn}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{\sqrt{a_{nn}a_{11}}} & \frac{a_{n2}}{\sqrt{a_{nn}a_{22}}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= B
\end{aligned}
$$

Entonces, B es definida positiva.

4.4. Ejercicio 4

(a) Sea $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una reflexión de Householder. Probar que $H^2 = 1$.

(b) Probar que la matriz

$$
H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}
$$

es una reflexión de Householder.

(c) Probar que toda matriz ortogonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede escribir como producto de a lo sumo n matrices de Householder. *Sugerencia: Según un ejercicio de la práctica, si una matriz es ortogonal y triangular superior, entonces sus columnas son de la forma $\pm e_i$, donde e_i es un vector de la base canónica.*

4.4.1. (a)

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ entonces una reflexión de Householder se define como $H \in \mathbb{R}^{n \times n} \,/\, Hv_i = -v_i \wedge Hv_j = v_j \, \forall j \neq i$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
H^2 v_i &= H\left(Hv_i\right) \\
&= H\left(-v_i\right) \\
&= -Hv_i \\
&= v_i
\end{aligned}
$$

$$
\therefore H^2 = \mathbb{I}
$$

4.4.2. (b)

Consideremos la base de $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, donde e_i son los vectores canónicos. Escribamos H por bloques:

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos:

$$\begin{aligned} He_n &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -e_n \end{aligned}$$

Consideremos $i \neq n$. Entonces:

$$\begin{aligned} He_i &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e_i \end{aligned}$$

Entonces, por definición, H es una reflexión de Householder.

4.4.3. (c)

Hallemos la factorización QR de A a través del método de Householder. De esta forma vamos a hallar:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{m} H_m\right) A &= R \\ \therefore A &= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{m} H_{m+1-i}^{\dagger}\right)}_{=Q} R \end{aligned}$$

donde $m \leqslant n$. Sabemos que R es triangular superior, y como A y Q son ortogonales entonces las columnas de R debe ortogonal. Entonces, por la sugerencia sabemos que las columnas de R deben ser vectores canónicos que a lo sumo tienen el signo invertido. Sin embargo, como la matriz R es resultado de la factorización QR usando el método de Householder sabemos que el signo es positivo. Entonces, $R = \mathbb{I}$. Como $H_i^{\dagger} = H_i$ entonces A es un producto de matrices de Householder.

5. Primer Parcial, Primer Cuatrimestre 2020

5.1. Ejercicio 1

Sean $u^{\dagger} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$ y $e_i \in \mathbb{R}^n$ el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$. Definimos las siguientes matrices:

$$A_i = ue_i^{\dagger},\ B_i = e_i u^{\dagger}$$

Probar:

(a) Con $n \geqslant 3$, existe i $(1 < i < n)$ y u para los cuales la matriz A_i tiene infinitas factorizaciones LU. Hallar al menos dos distintas para algún $u \neq 0$.

(b) Las matrices $A_n B_n$ y $B_n A_n$ tienen factorización LU.

5.1.1. (a)

Notemos:

$$A_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & u_{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es una matriz cuyas columnas son todas nulas menos la i-ésima columna que es u. Es decir, $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & u & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Notemos que si $i = n-1$ entonces tenemos:

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & u_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & u_n & 0 \end{pmatrix}$$

pero también podemos tomar:

$$\begin{cases} U = \begin{pmatrix} 0_{(n-1)\times(n-2)} & \tilde{u} & 0_{n-2} \\ 0^\dagger_{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{(n-2)\times(n-1)} & 0_{n-2} \\ e^\dagger_{n-1} & 0 \\ v^\dagger & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

donde $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ es el vector con los primeros $n-1$ elementos de u y $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ es un vector cuyos elementos son todos ceros menos algún j-ésimo elemento que es $\frac{u_n}{u_j}$. Esto va a valer siempre y cuando $u_j \neq 0$ y $0 < j < n$. Para ver un caso concreto consideremos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Notemos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Lo mismo se puede hacer para el resto de los posibles valores de i.

5.1.2. (b)

Notemos:

$$\begin{aligned}A_nB_n &= u\underbrace{e_n^\dagger e_n}_{=1}u^\dagger \\ &= uu^\dagger\end{aligned}$$

Esta matriz puede diagonalizarse usando el método de elimincación gaussiana sin pivoteo porque los elementos de la diagonal son u_i^2. Si $u_i = 0$ entonces los elementos debajo son nulos y si $u_i \neq 0$ entonces se pueden eliminar los elementos debajo haciendo $-\frac{u_j}{u_i}$.

Notemos:

$$\begin{aligned}B_nA_n &= e_nu^\dagger ue_n^\dagger \\ &=\parallel u \parallel^2 e_ne_n^\dagger\end{aligned}$$

La factorización LU de B_nA_n es $L = \mathbb{I}$ y $U = B_nA_n$, ya que B_nA_n tiene un solo elemento no nulo en la diagonal que es $(B_nA_n)_{nn} =\parallel u \parallel^2$.

5.2. Ejercicio 2

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente matriz es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} A & ae_1 \\ ae_1^\dagger & 1 \end{pmatrix}$$

Solución Notemos que la matriz es simétrica, así que para demostrar que es definida positiva veamos que tiene factorización de Cholesky. Propongamos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & ae_1 \\ ae_1^\dagger & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L & 0_n \\ l^\dagger & \tilde{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L^\dagger & l \\ 0_n & \tilde{l} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} LL^\dagger & Ll \\ l^\dagger L^\dagger & \parallel l \parallel^2 + \tilde{l}^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Como A es simétrica definida positiva entonces podemos encontrar L tal que $A = LL^\dagger$ a través de su factorización de Cholesky. Luego, tenemos que $l = aL^{-1}e_1$. Sabemos que hay L^{-1} porque es la amtriz que proviene de la factorización de Cholesky de A que es simétrica y definida positiva. Entonces, tenemos que:

$$\parallel l \parallel^2 + \tilde{l}^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \tilde{l}^2 &= 1 - \parallel l \parallel^2 \\ &= 1 - \left(aL^{-1}e_1\right)^\dagger \left(aL^{-1}e_1\right) \\ &= 1 - a^2e_1^\dagger L^{-1\dagger}L^{-1}e_1 \\ &= 1 - a^2e_1^\dagger \left(LL^\dagger\right)^{-1} e_1 \\ &= 1 - \underbrace{a^2e_1^\dagger A^{-1}e_1}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

$$\therefore |a| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e_1^\dagger A^{-1} e_1}}$$

5.3. Ejercicio 3

Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal con elementos q_{ij}. Denominamos $\mathrm{cl}_i\left(Q\right)$ la i-ésima columna de Q para $1 \leqslant i \leqslant n$. Sea $u = \sum_{i=1}^n \mathrm{cl}_i\left(Q\right)$ y $v = \sum_{i=1}^n \mathrm{cl}_i\left(\mathbb{I}\right)$, donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Probar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} = u^\dagger v$.

(b) Probar que $\| \mathrm{cl}_j\left(Q\right) \|_1 \leqslant \sqrt{n}$. *Sugerencia: Considerar* $cl_j\left(Q\right)^\dagger w$ *para algún* w.

(c) Probar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{ij}| \leqslant n^{\frac{3}{2}}$.

5.3.1. (a)

Notemos:

$$\begin{aligned}
u^\dagger v &= \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{cl}_i\left(Q\right)^\dagger\right)\left(\sum_{j=1}^n \mathrm{cl}_j\left(\mathbb{I}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{cl}_i\left(Q\right)^\dagger \underbrace{\mathrm{cl}_j\left(\mathbb{I}\right)}_{=e_j} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{cl}_i\left(Q\right)^\dagger e_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}
\end{aligned}$$

5.3.2. (b)

Notemos:

$$\| \mathrm{cl}_j\left(Q\right) \|_1 = \sum_{i=1}^n |q_{ij}|$$

Consideremos entonces $w \in \mathbb{R}^n$ un vector que cumple que $w_i = \mathrm{sgn}\left(q_{ij}\right)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\| \mathrm{cl}_j\left(Q\right) \|_1 &= \mathrm{cl}_j\left(Q\right)^\dagger w \\
\| \mathrm{cl}_j\left(Q\right) \|_1 \geqslant 0 \rightarrow &= \| \mathrm{cl}_j\left(Q\right)^\dagger w \|_2 \\
\| \cdot \|_2 \text{ es submultiplicativa} \rightarrow &\leqslant \| \mathrm{cl}_j\left(Q\right) \|_2 \| w \|_2 \\
Q \text{ es ortogonal} \rightarrow &= \| w \|_2 \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}$$

5.3.3. (c)

Notemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|q_{ij}| &= \sum_{j=1}^{n}\parallel \mathrm{cl}_j\left(Q\right)\parallel_1 \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\sqrt{n} \\
&= n^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$