DEMOSTRACIONES

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua, A compacto $\Rightarrow \exists\, M, m \in A / f(m) \leq f(x) \leq f(M)\ \forall x \in A$

Supongamos que f NO está acotada superiormente:

Tomo: $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión, $\{X_k\} \in A / f(X_k) > K_0$, $K_0 \in A$

Como A es compacto $\Rightarrow X_k$ está acotada

$\exists \{X_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{X_k\} / \lim_{j \to \infty} X_{k_j} = Q$, $Q \in A$

Como f es continua: $\lim_{j \to \infty} f(X_{k_j}) = f(Q)$

~~[illegible]~~ Asumimos que f no está acotada y sin embargo $f(X_{k_j})$ lo está. ABSURDO!

$\therefore$ f está acotada superiormente

Análogamente podemos demostrar que f está acotada inferiormente.

Como f está acotada: $\exists\, M, m \in A /$ $M = \text{Sup}(A)$
$m = \text{Inf}(A)$

Dado esto, podemos armar dos sucesiones en A cuyo límite sea M y m y entonces:

$\exists\, M, m \in A / f(m) \leq f(x) \leq f(M)\ \forall x \in A$ Q.E.D.

CONTINUIDAD

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(Q_n) = f(p)\ \forall \{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}} / \lim_{n \to \infty} Q_n = p$

$\Rightarrow$) Sabemos: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

Tomemos: $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}} / \lim_{n \to \infty} Q_n = p \Rightarrow \exists n_1 / |Q_n - p| < \delta\ \forall n > n_1 \Rightarrow \underline{|f(Q_n) - f(p)| < \varepsilon}$

$\Leftarrow$) Tomemos: $X, \{Q_n\} \in (p - \delta, p + \delta)$ Si f NO es continua:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| > \varepsilon$ pero entonces...

$|Q_n - p| < \delta \Rightarrow |f(Q_n) - f(p)| > \varepsilon$ Sin embargo sabemos que $\lim_{n \to \infty} Q_n = p \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(Q_n) = f(p)$

ABSURDO! f tiene que ser continua en p.

Q.E.D.

TEOREMA DE FERMAT:

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ extremo de $f \Leftrightarrow \nabla f(p) = \vec{0}$

Veamos las derivadas direccionales de f en p:

Tomo: $v \in \mathbb{R}^n / \|v\| = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$, $t \in \mathbb{R}$

qvq.: $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0 \Rightarrow \nabla f(p) = \vec{0}$ Tomemos p máximo de f:

$f(p) \geq f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ Veamos las derivadas direccionales tomando el límite por la derecha / $t > 0$:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\overbrace{f(p+tv) - f(p)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \leq 0$$

Como $f(p) \geq f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f(p) \geq f(p+tv) \; \forall t \in \mathbb{R}, \; \forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(p+tv) - f(p) \leq 0$.

Ahora veamos las derivadas direccionales tomando el límite por la izquierda / $t < 0$:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\overbrace{f(p+tv) - f(p)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \geq 0$$

por el mismo motivo de antes pero ahora como $t < 0$ entonces invierte la desigualdad. Entonces tenemos:

$$0 \leq \lim_{t \to 0^-} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \leq 0$$

por sánguche: $\lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial v}(p) \Rightarrow \nabla f(p) = \vec{0}$ Q.E.D.

TEOREMA DE ROLLE:

Sea $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua y derivable en (a,b) / $f(a) = f(b)$ $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$

Como $[a,b]$ es un conjunto compacto y f es continua, por Teorema de Weierstrass, $\exists M, m \in [a,b] / f(m) \leq f(x) \leq f(M) \ \forall x \in [a,b]$.

$M = \text{máx}([a,b])$

$m = \text{mín}([a,b])$

$\underline{M = m}$: $f(x) = d \in \mathbb{R} \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$ f es una constante.

$\underline{M \neq m}$: $M \in (a,b) \vee m \in (a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$ Como c es el extremo M o m entonces por Teorema de Fermat su derivada es 0.

Q.E.D.

TEOREMA DE LAGRANGE.

Sea $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$

Tomemos: $g: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) x$

Notemos: $g(a) = f(a) - \left(\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) a = \dfrac{f(b)\,a - f(a)\,b}{a - b}$

$$\parallel$$

$g(b) = f(b) - \left(\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) b = \dfrac{f(b)\,a - f(a)\,b}{a - b}$

$\Rightarrow g(a) = g(b)$ Por Teorema de Rolle $\exists c \in (a,b) / g'(c) = 0$

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0$

$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ Q.E.D.

TEOREMA DE CAUCHY:

Sean $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en $(a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) /$
$f'(c)(g(a) - g(b)) = g'(c)(f(a) - f(b))$

Tomemos: $h : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (f(a) - f(b))(g(a) - g(x)) - (g(a) - g(b))(f(a) - f(x))$

Notemos: $h(a) = (f(a) - f(b))(\underbrace{g(a) - g(a)}_{=0}) - (g(a) - g(b))(\underbrace{f(a) - f(a)}_{=0}) = 0$

$h(b) = (f(a) - f(b))(g(a) - g(b)) - (g(a) - g(b))(f(a) - f(b)) = 0$

$\Rightarrow h(a) = h(b)$ Por Teorema de Rolle $\exists\, c \in (a,b) / h'(c) = 0$

$h'(x) = f(b)\, g'(x) - f(a)\, g'(x) - g(b)\, f'(x) + g(a)\, f'(x)$

$h'(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - g'(x)(f(a) - f(b))$

$\Rightarrow h'(c) = f'(c)(g(a) - g(b)) - g'(c)(f(a) - f(b)) = 0$

$\Rightarrow f'(c)(g(a) - g(b)) = g'(c)(f(a) - f(b))$ Q.E.D.

TEOREMA DE BOLZANO:

Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $/ f(a) < 0,\ f(b) > 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) / f(c) = 0$

Tomo: $A = \{ x \in [a,b] / f(x) \leq 0 \}$ Notemos que $A \neq \emptyset$ porque contiene al menos al a y está acotado por b.

$c \in (a,b) / c = \text{Sup}(A) \Rightarrow f(c) \leq 0$ porque $c \in A$ ya que A es compacto

$\Rightarrow [a,c] \in A$, Notemos que los puntos $[c,b]$ deben cumplir que $f \geq 0$.

$\Rightarrow 0 \leq f(c) \leq 0$ por sánguche: $f(c) = 0$ Q.E.D.

DIFERENCIABLE $\Rightarrow$ CONTINUA:

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ / f sea diferenciable en $p \Rightarrow f$ es continua en p.

Sabemos: f es diferenciable en $p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \frac{|f(x) - f(p) - \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle|}{\|x-p\|} = 0$

$$\Rightarrow \forall \tilde{\varepsilon} > 0 \; \exists \tilde{\delta} > 0 \,/\, \|x-p\| < \tilde{\delta} \Rightarrow \frac{|f(x) - f(p) - \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle|}{\|x-p\|} < \tilde{\varepsilon}$$

qvq: $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,/\, \|x-p\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

Acotemos: $|f(x) - f(p)| = \frac{|f(x) - f(p) - \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle + \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle|}{\|x-p\|} \cdot \|x-p\|$

$$\leq \frac{|f(x) - f(p) - \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle|}{\|x-p\|} \cdot \|x-p\| + \frac{|\langle \nabla f(p), (x-p) \rangle|}{\cancel{\|x-p\|}} \cdot \cancel{\|x-p\|}$$

Esto lo tenemos acotado $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$. Tomemos $\tilde{\varepsilon} = 1$

$$< \|x-p\| + \underbrace{\|\nabla f(p)\| \, \|x-p\|}_{\text{por desigualdad Cauchy - Schwartz}} = \underbrace{\|x-p\|}_{<\delta} (1 + \|\nabla f(p)\|)$$

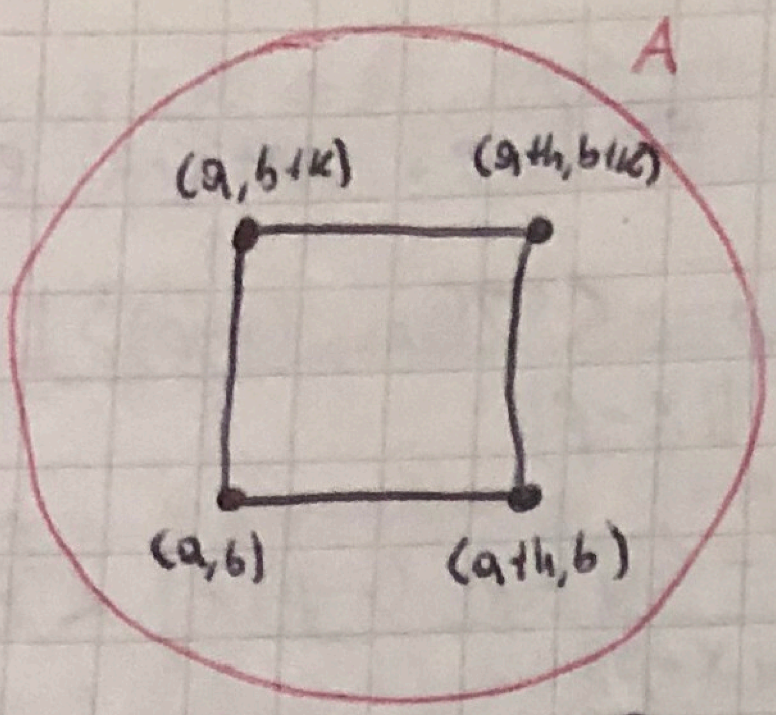
$$< \underbrace{(1 + \|\nabla f(p)\|)}_{\neq 0} \delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{1 + \|\nabla f(p)\|}$$

$$\Rightarrow \underline{\delta = \min \left(\left\{ 1, \varepsilon / (1 + \|\nabla f(p)\|) \right\} \right)}$$ Q.E.D.

$C \Rightarrow$ DIFERENCIABLE.

Sea $f: \overset{A\subseteq\mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, $f \in C \Rightarrow f$ es diferenciable $\forall x \in A^\circ$.

Tomemos:



qvq: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - \langle \nabla f(a,b), (h,k)\rangle|}{\|(h,k)\|} = 0$

Como f es C en $A \Rightarrow \exists \nabla f(x)\ \forall x \in A^\circ$

Como $(a,b) \in A \Rightarrow \exists \nabla f(a,b)$

Notemos: $f(a+h,b+k) - f(a,b) = f(a+h,b+k) \underbrace{- f(a,b+k) + f(a,b+k)}_{=0} - f(a,b)$

Tomemos: $c \in (a, a+h)$, $d \in (b, b+k)$ Por Teorema de Lagrange:

$$\underbrace{hf'(c)}_{\text{derivada en } x} = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) \quad , \quad \underbrace{kf'(d)}_{\text{derivada en } y} = f(a,b+k) - f(a,b)$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - \langle \nabla f(a,b), (h,k)\rangle|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h\frac{\partial f}{\partial x}(c) + k\frac{\partial f}{\partial y}(d) - \langle \nabla f(a,b), (h,k)\rangle|}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h\frac{\partial f}{\partial x}(c) + k\frac{\partial f}{\partial y}(d) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|h(\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)) + k(\frac{\partial f}{\partial y}(a,d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))|}{\|(h,k)\|}$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|h|}{\|(h,k)\|}}_{\leq 1} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right| + \underbrace{\frac{|k|}{\|(h,k)\|}}_{\leq 1} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$$

Como $c \in (a, a+h)$, $d \in (b, b+k)$
$(h,k)\to(0,0) \Rightarrow c \to a$, $d \to b$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right| = 0$$

Es diferenciable

Q.E.D.

REGLA DE CADENA:

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$, $G: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, A, B abiertos, $p \in A$ / F es diferenciable en p y G es diferenciable en $F(p)$ $\Rightarrow$ $G \circ F$ es diferenciable en p y
$D(G \circ F)_{(p)} = DG(F(p)) \cdot DF(p)$

Sabemos: $$\lim_{x \to p} \frac{\|F(x) - F(p) - DF(p)(x-p)\|}{\|x-p\|} = 0$$ F es diferenciable en p

$$\lim_{z \to F(p)} \frac{\|G(z) - G(F(p)) - DG(F(p))(z - F(p))\|}{\|z - F(p)\|} = 0$$ G es diferenciable en $F(p)$

qvq: $$\lim_{x \to p} \frac{\|G(F(x)) - G(F(p)) - DG(F(p))DF(p)(x-p)\|}{\|x-p\|} = 0$$ Acotemos

$$= \lim_{x \to p} \frac{\|G(F(x)) - G(F(p)) \overbrace{- DG(F(p))(F(x) - F(p)) + DG(F(p))(F(x) - F(p))}^{=0} - DG(F(p))DF(p)(x-p)\|}{\|x-p\|}$$

separo

$$\leq \lim_{x \to p} \frac{\|G(F(x)) - G(F(p)) - DG(F(p))(F(x) - F(p))\|}{\|x-p\|} + \frac{\|DG(F(p))(F(x) - F(p)) - DG(F(p))DF(p)(x-p)\|}{\|x-p\|}$$

Como F es diferenciable en p $\Rightarrow$ F es continua en p $\Rightarrow$ $\lim_{x \to p} F(x) = F(p)$, $\frac{\|F(x) - F(p)\|}{\|x-p\|} \leq C$

Constante de Lipschitz

$$\leq \lim_{x \to p} C \overbrace{\frac{\|G(F(x)) - G(F(p)) - DG(F(p))(F(x) - F(p))\|}{\|F(x) - F(p)\|}}^{\to 0} + \|DG(F(p))\| \overbrace{\frac{\|F(x) - F(p) - DF(p)(x-p)\|}{\|x-p\|}}^{\to 0}$$

Acoté

Desigualdad Cauchy-Schwartz

Notemos que como F es continua en p entonces mi primer término sabemos que tiende a 0 ya que tomando $Z = F(x)$ tenemos que G es diferenciable en $F(p)$. También, como F es diferenciable en p, el segundo término también tiende a 0. Por lo tanto todo el límite tiende a 0 y cumple que es diferenciable.

Q.E.D.

POLINOMIO DE TAYLOR:

Sea $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable $n+1$ veces $\Rightarrow f(x)=P_n(x)+R_n(c)\ \forall x\in[a,b]$,

$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(p)\frac{(x-p)^i}{i!}$, $p\in[a,b]$, $R_n(c)=f^{(n+1)}(c)\frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!}$, $c\in[x,p]$

qvq: $f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+f''(p)\frac{(x-p)^2}{2}+\dots+f^{n}(p)\frac{(x-p)^n}{n!}+K\frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!}$ hallemos K para que se cumpla la igualdad.

Fijemos x y tomemos: $g(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}-\dots-f^{n}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}-K\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

Notemos: $g(p)=g(x)=0$ Por Teorema de Rolle $\exists\, c\in(x,p)\,/\,g'(c)=0$

$$g'(t)=-\cancel{f'(t)}-\cancel{f''(t)(x-t)}+\cancel{f'(t)}-\cancel{f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}}+\cancel{f''(t)(x-t)}-\dots-f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}+K\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow g'(t)=K\frac{(x-t)^n}{n!}-f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}=\left(K-f^{n+1}(t)\right)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow g'(c)=\left(K-f^{n+1}(c)\right)\frac{(x-c)^n}{n!}=0\Rightarrow K=f^{n+1}(c)$$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(p)+f'(p)(x-p)+f''(p)\frac{(x-p)^2}{2}+\dots+f^{n}(p)\frac{(x-p)^n}{n!}}_{P_n(x)}+\underbrace{f^{n+1}(c)\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(c)}$$

Q.E.D.

CRITERIO DEL HESSIANO.

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^3$, $p \in \mathbb{R}^n$ extremo de f.
$Hf(p) > 0 \Rightarrow p$ es mínimo local
$Hf(p) < 0 \Rightarrow p$ es máximo local
$Hf(p)$ falla $\Rightarrow p$ es punto silla

Como $f \in C^3$ voy a aproximarla por su Polinomio de Taylor de grado 2:

$$f(x) = f(p) + \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(p)(x-p), (x-p) \rangle + R(c), \quad c \in (x,p)$$

Como p es extremo de f, por el Teorema de Fermat, $\nabla f(p) = \vec{0}$

$$f(x) = f(p) + \tfrac{1}{2} \langle Hf(p)(x-p), (x-p) \rangle + R(c)$$

$$f(x) = f(p) + \underbrace{\frac{\|x-p\|^2}{2} \left\langle Hf(p)\left(\frac{x-p}{\|x-p\|}\right), \left(\frac{x-p}{\|x-p\|}\right) \right\rangle}_{\text{llamémoslo } Q(p)} + \frac{R(c)}{\|x-p\|^2} \cdot \|x-p\|^2$$ Multiplico y divido por $\|x-p\|^2$

$$\Rightarrow f(x) = f(p) + \|x-p\|^2 Q(p) + \|x-p\|^2 \frac{R(c)}{\|x-p\|^2} \Rightarrow \frac{f(x) - f(p)}{\|x-p\|^2} = Q(p) + \frac{R(c)}{\|x-p\|^2}$$

Como estamos en un entorno de p, para x suficientemente cercano a p podemos tomar $\frac{R(c)}{\|x-p\|^2} \cong 0$ y entonces

$$\frac{f(x) - f(p)}{\|x-p\|^2} \cong Q(p)$$

Notemos:
$Q(p) > 0 \Rightarrow Hf(p) > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(p)$, p es mínimo local
$Q(p) < 0 \Rightarrow Hf(p) < 0 \Rightarrow f(x) \leq f(p)$, p es máximo local
$Q(p)$ es indefinido $\Rightarrow p$ es punto silla

Q.E.D.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

Sea $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C$, $g \in C$, $S = \{x \in A / g(x) = c\}$, $p \in S / \nabla g(p) \neq \vec{0}$, p extremo de f en un entorno en $S \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$

Por el Teorema de la Función Implícita: $\exists B_r(p) \subsetneq \mathbb{R}^{n-1}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ entorno de p, $\varphi: B_r(p) \to \mathbb{R} / \mathrm{Graf}(\varphi) = S \cap V$.

Sabemos que f tiene un extremo p en $S \cap V$. Si aplicamos φ a la variable remplazada en f obtenemos $h: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} / \nabla h(p) = \vec{0}$.

Esta función h es la de f restringida solo a S, una superficie de nivel de g. Como $\nabla f(p)$ es perpendicular a los generadores del plano tangente en p y $\nabla g(x)$ es perpendicular a $S \Rightarrow \nabla f(p) \parallel \nabla g(p)$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ Q.E.D.

INTEGRABLE:

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists P$ partición $/ S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$

Por definición: f es integrable $\Leftrightarrow \mathrm{Sup}(I(f,P)) = \mathrm{Inf}(S(f,P))$

$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i), \quad I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1} - t_i)$$

$$M_i = \sup (f(s)), \quad m_i = \inf (f(s)), \quad \forall s \in (t_i, t_{i+1})$$

$\Leftarrow$) $\mathrm{Sup}(I(f,P)) \leq \mathrm{Inf}(S(f,P))$ ✓ qvq.: $\mathrm{Sup}(I(f,P)) \geq \mathrm{Inf}(S(f,P))$

$\Rightarrow \mathrm{Inf}(S(f,P)) - \mathrm{Sup}(I(f,P)) \leq S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$ está acotado ✓

$\Rightarrow$) $\int_a^b f = \mathrm{Sup}(I(f,P)) = \mathrm{Inf}(S(f,P))$, $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$

$\Rightarrow S(f,P) < \int_a^b f + \varepsilon/2$

$I(f,P) > \int_a^b f - \varepsilon/2$

Tomo: P' refinamiento de P

$\Rightarrow S(f,P') \leq S(f,P) < \int_a^b f + \varepsilon/2$

$I(f,P') \geq I(f,P) > \int_a^b f - \varepsilon/2$

$\Rightarrow S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$ Q.E.D.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$.

Notemos: $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow |F(x) - F(a)| = |\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)| dt$

$\leq \inf(S(|f|, P)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i)$ Tomo: $|f| \leq M = \max(f)$

$\Rightarrow |F(x) - F(a)| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = M(x-a)$

$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} |F(x) - F(a)| \leq \lim_{x \to a^+} M(x-a) = 0$ F es continua en a

$|F(x) - F(b)| = |\int_a^x f(t)dt - \int_a^b f(t)dt| = |-(\int_x^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt)| = |\int_x^b f(t) dt|$

$\leq \int_x^b |f(t)| dt \leq \inf(S(|f|, Q)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i)$ Tomo: $|f| \leq M = \max(f)$

$\Rightarrow |F(x) - F(b)| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = M(b-x)$

$\lim_{x \to b^-} |F(x) - F(b)| \leq \lim_{x \to b^-} M(b-x) = 0$ F es continua en b

Mostremos ahora que F es derivable en $(a,b) \Rightarrow$ F es continua en (a,b).

Tomo: $x_0 \in (a,b)$. $x > x_0$: $\dfrac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0}$

$x < x_0$: $\dfrac{\int_a^{x_0} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{x_0 - x} = \dfrac{\int_x^{x_0} f(t)dt}{x_0 - x} = \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0}$

Tomemos: $m = \min(f) \in [x_0, x]$ y $M = \max(f) \in [x_0, x]$

$\Rightarrow m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [x_0, x]$

$\Rightarrow m(x - x_0) = \int_{x_0}^x m\,dt \leq \int_{x_0}^x f(t)dt \leq \int_{x_0}^x M\,dt = M(x - x_0)$ Por Barrow

$\Rightarrow m \leq \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} \leq M \Rightarrow \lim_{x \to x_0} m \leq \lim_{x \to x_0} \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0} M$

$\Rightarrow f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0)$ Por Sánguche:

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a,b)$ Q.E.D.