CONJUNTOS Y SUCESIONES

Def.: Dado un conjunto A decimos que M es cota superior si $a \leq M \; \forall a \in A$. El supremo de A (S) es la menor de las cotas superiores

Prop.: Sea $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, A acotado superiormente $\Rightarrow \exists \, Sup(A) = S$.
Axioma de Completitud

Prop.: S es $sup(A) \Leftrightarrow$ ① S es cota superior
② $\exists a \in A \,/\, S - \varepsilon < a \leq S \;\; \forall \varepsilon > 0$

Def.: Dado un conjunto A decimos que M es cota inferior si $a \geq M \; \forall a \in A$. E ínfimo de A (I) es la mayor de las cotas inferiores

Prop.: Sea $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, A acotado inferiormente $\Rightarrow \exists \, \inf(A) = I$.
Axioma de Completitud

Prop.: I es $\inf(A) \Leftrightarrow$ ① I es cota inferior
② $\exists a \in A \,/\, I + \varepsilon > a \geq I \;\; \forall \varepsilon > 0$

Def.: Llamamos Sucesión a un conjunto de números reales $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ Es Estrictamente creciente
$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow$ Es Creciente
$a_n > a_{n+1} \Rightarrow$ Es Estrictamente decreciente
$a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow$ Es decreciente

Def.: Sea $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$, decimos que $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |a_n - l| < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0, \; n \geq n_0$$

TEOREMA: Sea $A \neq \emptyset$ acotado superiormente $\Rightarrow \exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A \,/$ $\lim_{n \to \infty} a_n = S$. $S \notin A \Rightarrow \{a_n\}$ es estricta.

Def.: Llamamos Norma $\|p\|$ una T.L. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ /
① $\|p\| \geq 0 \ \forall p \in \mathbb{R}^n$
② $\|\lambda p\| = |\lambda| \|p\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
③ $\|p+Q\| = \|P\| + \|Q\| \ \forall p, Q \in \mathbb{R}^n$

Def.: • Llamamos Norma 1: $\|P\|_1 = \sum_i |P_i|$
• Llamamos Norma 2: $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_i P_i^2}$
• Llamamos Norma ∞: $\|P\|_\infty = \max_i |P_i|$.

Def.: Llamamos Producto Interno $\langle V, W\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ /
$\langle V, W\rangle = \sum_i V_i W_i \ \forall V, W \in \mathbb{R}^n$

Prop.: ① $\langle V, W\rangle = \langle W, V\rangle$
② $\langle V, V\rangle > 0 \ \forall V \neq 0$
③ $\langle V_1 + V_2, W\rangle = \langle V_1, W\rangle + \langle V_2, W\rangle$
④ $\langle \lambda V, W\rangle = \lambda \langle V, W\rangle$

Def.: Llamamos Bola de Radio r y Centro p a $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-p\|_2 < r\}$
• $A_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-p\|_\infty < r\}$
• $H_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-p\|_1 < r\}$

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lo llamamos Abierto si $\exists r > 0 / B_r(x) \subseteq A \ \forall x \in A$

Def.: Llamamos Sucesión en $\mathbb{R}^n$ a un conjunto $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$.
Decimos que $\lim_{k \to \infty} P_k = P$ si $\exists K_0 / \|P_k - P\| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0, \ K \geq K_0$

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos Clausura de A al conjunto
$\bar{A} = \{P \in \mathbb{R}^n / \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ y $\lim_{k \to \infty} P_k = P\}$
Llamamos a A Cerrado si $\bar{A} = A$.

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos Interior de A al conjunto
$A^\circ = \{P \in A / \exists r > 0 : B_r(P) \subseteq A\}$
Llamamos a A Abierto si $A^\circ = A$

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos Frontera de A al conjunto
$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$

Prop.: Dado $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lim_{k\to\infty} P_k = P \iff \lim_{k\to\infty} (P_k)_j = P_j \quad \forall j\in[1,n]\subseteq\mathbb{N}$
A esta sucesión $\{(P_k)_j\}$ la llamamos una Subsucesión de $\{P_k\}$

FUNCIONES

Funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

Def.: Llamamos Dominio de una función f al conjunto:
$Dom(f) = \{x\in\mathbb{R}^n / \exists a\in\mathbb{R} : f(x) = a\}$

Def.: Llamamos Gráfico de f al conjunto:
$Graf(f) = \{(x, f(x)) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} / x\in Dom(f)\}$

Def.: Llamamos Curva de Nivel $C\in\mathbb{R}$ al conjunto:
$C_c = \{(x,y)\in Dom(f)\subseteq\mathbb{R}^2 / f(x,y) = c\}$

Def.: Llamamos Superficie de Nivel $C\in\mathbb{R}$ al conjunto:
$S_c = \{x\in Dom(f)\subseteq\mathbb{R}^n / f(x) = c\} \quad \forall n\geq 2$

Funciones $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$:

Def.: Llamamos Curva a una función $\alpha: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ /
$Im(\alpha) = \{\alpha(t)\in\mathbb{R}^n / t\in I\}$

Límites:

Def.: Dada $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $p\in\bar{A} \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = l \in\mathbb{R}^m$ Límite
$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 / \|x-p\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$

Prop.: $\lim_{x\to p} f(x) = l \iff \forall\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}} / \lim_{k\to\infty} P_k = P,\ P_k\neq P \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(P_k) = l$

Prop.: $\lim_{x\to p} f(x) = l \iff \lim_{k\to\infty} f(p_k) = l \ \forall \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} / \lim_{k\to\infty} p_k = p, \ p_k \neq p$

$\iff \lim_{k\to\infty} (f(p_k))_j = l_j \iff \lim_{k\to\infty} f_j(p_k) = l_j \iff \lim_{x\to p} f_j(x) = l_j$

Prop.: Dadas $\{P_k\}, \{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}} / \lim_{k\to\infty} f(P_k) \neq \lim_{k\to\infty} f(Q_k) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} f(x)$

$\lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{k\to\infty} Q_k = P$

Prop.: Dadas $\alpha, \beta / \lim_{t\to t_0} \alpha(t) = P, \ \lim_{t\to t_1} \beta(t) = P$,

$\lim_{t\to t_0} (f\circ\alpha)(t) \neq \lim_{t\to t_1} (f\circ\beta)(t) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} f(x)$

Continuidad:

Def.: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in A$ Llamamos a f Continua en p si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. Si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \ \forall p \in A \Rightarrow f$ es Continua en A.

TEOREMA: Dadas $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A y $g: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ continua en B $\Rightarrow g\circ f$ es continua en $\{x / x \in A, f(x) \in B\}$.

TEOREMA DE BOLZANO: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $/ f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = 0$.

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lo llamamos Arcoconexo si dado $P, Q \in A \ \exists \alpha: [0,1] \to A$ continua $/ \alpha(0) = P, \ \alpha(1) = Q$.

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lo llamamos Compacto si es Cerrado y está acotado.

TEOREMA: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ arcoconexo, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y $P, Q \in A / f(P) < 0, \ f(Q) < 0 \Rightarrow \exists c \in A / f(c) = 0$

TEOREMA: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A compacto y continuo $\Rightarrow \exists P_m, P_M \in A /$ $f(P_m) = \min(f(x))$, $f(P_M) = \max(f(x))$

DERIVADAS

Derivadas en $\mathbb{R}$:

Def.: Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ llamamos la Derivada de f en x_0 a

$$f'(x_0) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Prop.: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \exists f'(x_0)$. Llamamos a f Derivable en x_0

Def.: Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ llamamos Recta Tangente de f en x_0 a

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Def.: Decimos que f tiene un Máximo Relativo en x_0 si

$$f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \forall \delta > 0$$

Def.: Decimos que f tiene un Mínimo Relativo en x_0 si

$$f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \forall \delta > 0$$

Prop.: Si f es derivable y tiene un max o min relativo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

TEOREMA DE VALOR MEDIO DE ROLLE: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) / f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$

TEOREMA DE LAGRANGE: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b)

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Derivadas en $\mathbb{R}^n$:

Def.: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in A^\circ$, $v \in \mathbb{R}^n / \|v\| = 1$ llamamos Derivada Direccional de f en p en la dirección v a $\frac{\partial f(p)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$

Def.: Dada $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ llamamos Derivada de Curva de α en t_0 a $\alpha'(t_0) = (\alpha_i'(t_0))$ donde α_i son derivables $\forall i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$

Def.: Llamamos Recta Tangente de Curva a $L(t) = \alpha(t_0) + \alpha'(t_0) t$

Def.: Llamamos Derivada Parcial i-ésima en p a $\frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t}$

Def.: Dado $Q, N \in \mathbb{R}^n$ llamamos Hiperplano de normal N que pasa por Q a todos los puntos $X \in \mathbb{R}^n / \langle X - Q, N \rangle = 0$.

Def.: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ llamamos Gradiente de f en p a $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_i} \right) \forall i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$

Def. Prop.: Definimos $w_i = \left(e_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\right) / N = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p), -1\right) \Rightarrow \langle w_i, N \rangle = 0 \ \forall i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$

Def.: Dados $Q = (P, f(p))$, $X = (Y, Y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ llamamos Plano Tangente en p
$Y_{n+1} = f(p) + \langle \nabla f(p), Y - p \rangle$

Def.: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in A^\circ$ llamamos a f Diferenciable en p si:
$\exists \nabla f(p)$ y $\lim_{X \to p} \frac{|f(x) - f(p) - \langle \nabla f(p), X - p \rangle|}{\|X - p\|} = 0$

TEOREMA: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in A^\circ / f$ es diferenciable en $p \Rightarrow f$ es continua en p.

HOJA Nº

FECHA

TEOREMA DE UNICIDAD: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in A^\circ$, $T_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una T.L. / $\lim_{x \to p} \frac{|f(x) - f(p) - T_p(x-p)|}{\|x-p\|} = 0$.

① $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p) = T_p(v) \; \forall v / \|v\| = 1$

② $T_p(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \Rightarrow T_p$ es única

③ f es diferenciable en p y $T_p(x) = \langle \nabla f(p), x \rangle = D_p f(p)$

En particular, $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle \; \forall v / \|v\| = 1$

Llamamos a $D_p f(p)$ la <u>Diferencial</u> de f en p.

TEOREMA: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in A^\circ$, f definida en un entorno de p / $\exists \nabla f(p)$ continua en $p \Rightarrow f$ es diferenciable en p.

Def.: Llamamos a una función f <u>C^n</u> si $\exists \frac{\partial^{(n)} f}{\partial x_i^{(n)}}(p) \; \forall p \in A^\circ$

<u>Funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$</u>:

Def.: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciable llamamos <u>Diferencial</u> de f en p a la matriz

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p), & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Obs.: $Df(p) = ((\nabla f_i(p))^+)^{*} \; \forall i \in [1, m] \subseteq \mathbb{N}$

NOTA

Prop.: Dadas $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $p \in \mathring{A} \Rightarrow$

① $f+g$ es diferenciable en p, $D(f+g)(p) = Df(p) + Dg(p)$

② $f \cdot g$ es diferenciable en p, $D(f \cdot g)(p) = Df(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg(p)$

③ f/g es diferenciable en p, $D(f/g)(p) = \dfrac{Df(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot Dg(p)}{(g(p))^2}$

Def.: Dada $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in \mathring{A}$, llamamos a f Diferenciable en p si $\exists T_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ T.L. / $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\| F(x) - F(p) - T_p(x-p) \|}{\|x-p\|} = 0$

Def.: Dada T una T.L. llamamos Norma Matricial a $\|T\|_\infty$ /

① $\|Tx\|_\infty \leq \|T\|_\infty \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

② $\|\lambda T\|_\infty = |\lambda| \|T\|_\infty$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|T+S\|_\infty \leq \|T\|_\infty + \|S\|_\infty$

③ F diferenciable en $p \Rightarrow \|F(x) - F(p)\| \leq C_r \|x-p\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n / \|x-p\| < r$, $C_r > 0$

Llamamos a C_r la Constante de Lipschitz (L)

TEOREMA: Dadas $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$, $G: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, A, B abiertos, $p \in A$, F diferenciable en p y G diferenciable en $F(p)$

$\Rightarrow G \circ F$ es diferenciable en p, $D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p)$

POLINOMIOS DE TAYLOR

TEOREMA EN $\mathbb{R}$: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con $n+1$ derivadas en $x_0 \in (a,b)$, $x \in (a,b)$ y $c \in (x, x_0)$ llamamos Polinomio de Taylor y Resto de Taylor respectivamente a $P_n(x)$ y $R_n(x)$ /

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde $P_n(x) = \sum\limits_{i=0} \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$,

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Def.: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lo llamamos Convexo si dados $P, Q \in A$

$(1-t)P + tQ \in A$ $\forall\, 0 < t \leq 1$

TEOREMA DE LAGRANGE: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, $f: A \to \mathbb{R}$ diferenciable y $P, Q \in A \Rightarrow \exists P_0 = (1-t)P + tQ \ \forall 0<t<1 \ / \ f(P) - f(Q) = \langle \nabla f(P_0), P-Q \rangle$

TEOREMA: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) \quad \forall p \in A, \forall i,j \in [1,n] \subseteq \mathbb{N}$$

Def.: Dada $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ llamamos <u>Matriz Hessiana</u> a

$$D^2 f(p) = Hf(p) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

TEOREMA: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $p, x \in A$, $p_0 \in (x, p) \Rightarrow f(x) = f(p) + \langle \nabla f(p), x-p \rangle + R_p(x) \ /$
$$R_p(x) = \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0)(x-p), x-p \rangle, \quad \lim_{x \to p} \frac{R_p(x)}{\|x-p\|} = 0$$

Obs. $R_p(x)$ es el resto, si quiero el resto de grado 3 dada $f \in C^3$
$$R_p(x) = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(p_0)(x_i - p_i)(x_j - p_j)(x_k - p_k)$$

Puntos máximos, mínimos y sillas

Def.: Sea A abierto, $f \in C^3 / \nabla f(p) = \vec{0}$ con $p \in A \Rightarrow Q_p(x) = \langle D^2 f(p)(x-p), (x-p) \rangle$

Prop.: $\exists v, w / Q_p(v) > 0$ y $Q_p(w) < 0 \Rightarrow f(p)$ tiene un Punto Silla.

TEOREMA: ① $Q_p(x) > 0 \ \forall x \Rightarrow f(p)$ es Mínimo Local. Q_p es Definida Positiva.

② $Q_p(x) < 0 \ \forall x \Rightarrow f(p)$ es Máximo Local. Q_p es Definida Negativa.

③ Si ① y ② fallan $\Rightarrow f(p)$ es Punto Silla. Q_p es Indefinida.

TEOREMA: Sea $D^2 f(p)$ simétrica $\Rightarrow Q_p(x) = \sum x_i^2 \lambda_i$, $x = \sum x_i v_i$, v autovectores, λ autovalores

① Q_p es Definida Positiva $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$

② Q_p es Definida Negativa $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$

③ Q_p es Indefinida $\Leftrightarrow$ No se cumplen ni ① ni ②.

Def.: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ llamamos Menores Principales a las determinantes de las matrices cuadradas formadas dentro de A empezando desde a_{11}.

TEOREMA: Sea $D^2 f(p)$ simétrica: $\Rightarrow$ Criterio del Hessiano

① Q_p es Definida Positiva $\Leftrightarrow$ Los Menores Principales son positivos.

② Q_p es Definida Negativa $\Leftrightarrow$ Los Menores Principales alternan de signo y $a_{11} < 0$.

③ Q_p es Indefinida $\Leftrightarrow$ No se cumplen ni ① ni ②.

Función inversa, implícita y superficies

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $F: A \to \mathbb{R}^n$, $F \in C / DF(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\det(DF(p)) \neq 0 \Rightarrow \exists U, V$ abiertos $/ F: U \to V$ es biyectiva, $F^{-1} \in C$, $DF^{-1}_{(F(a))} = (DF(a))^{-1} \ \forall a \in U$.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $S = \{\vec{x} \in A / f(\vec{x}) = 0\}$, $p \in S$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C / \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$:

① $\exists B_r(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ entorno de p, $\varphi: B \to \mathbb{R}$ diferenciable en p / $Graf(\varphi) = S \cap V$.

② $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \neq 0 \; \forall \vec{x} \in S \cap V$, $\nabla f(Q) \perp S \; \forall Q \in S \cap V \Rightarrow$ El plano tangente a S en Q es $\langle \nabla f(Q), \vec{x} - Q \rangle = 0$

③ $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\vec{u}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})} \; \forall \vec{u} \in B$.

TEOREMA: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $F: A \to \mathbb{R}^k$, $k \leq n$, $F \in C$, $S = \{\vec{x} \in A / F(\vec{x}) = 0\}$, $p \in S$ / $DF(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es sobreyectivo $\Rightarrow \exists U$ abierto de $\mathbb{R}^{n-k}$ entorno de $\vec{0}$ y V abierto de $\mathbb{R}^n$ entorno de p, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable / $\varphi(U) = S \cap V$.

TEOREMA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g: A \to \mathbb{R} \in C$, $S = \{x \in A / g(x) = 0\}$, p extremo de f restringido a S, $\nabla g(p) \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$.
p es un Mínimo Restringido de f a S si $f(p) \leq f(x) \; \forall x \in S \cap V$ con V entorno de p, $V \subseteq \mathbb{R}^n$; y Máximo Restringido si $f(p) \geq f(x)$.

INTEGRACIÓN

En $\mathbb{R}$.

Def.: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ llamamos Partición P de $[a,b]$ a $t_i / a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b$.

Def.: Sea $s \in (t_i, t_{i+1})$, $m_i = \text{Inf}(f(s))$ y $M_i = \text{Sup}(f(s))$ llamamos Suma Inferior a $I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1} - t_i)$ y Suma Superior a $S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i)$.

Def.: Llamamos a P' Refinamiento de P si se obtiene de subdividir los intervalos de P.

Prop. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, P partición:

① Si P' es refinamiento de $P \Rightarrow I(f,P') \geq I(f,P)$, $S(f,P') \leq S(f,P)$

② Si Q es otra partición $\Rightarrow I(f,P) \leq S(f,Q)$

Def.: Llamaremos $i = \text{Inf}(f(x))$ y $s = \text{Sup}(f(x))$, $x \in [a,b]$ / $S(f,P) \leq s(b-a)$ y $I(f,P) \geq i(b-a)$.

Def.: Llamaremos Integral Inferior a $I_*(f) = \text{Sup}(I(f,P))$ e Integral Superior a $I^*(f) = \text{Inf}(S(f,P))$ / $I_* \leq I^*$.

Def.: Llamamos a $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Integrable Riemann si $I_*(f) = I^*(f)$ y lo notamos $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$.

Prop.: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists P$ partición / $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$.

Def.: Llamamos Norma de la Partición P a $\|P\| = \text{máx}(|t_{i+1} - t_i|) \; \forall i \in [0, n-1] \subseteq \mathbb{R}$.

Prop.: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y monótona $\Rightarrow$ f es integrable Riemann.
Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f es integrable Riemann.

Prop.: Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables:

1. $f+g$ es integrable, $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. αf es integrable $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$
3. $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
4. $a \leq c \leq b \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
5. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

obs.: $\int_a^a f = 0$
$\int_a^b f = -\int_b^a f$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$.

REGLA DE BARROW: Dada G una función / $G' = F \Rightarrow G = F + c$, $c \in \mathbb{R}$
$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$

Integrales impropias:

Def.: Dada $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrable o $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ integrable la integral $\int_a^b f$ converge si el siguiente límite existe y es finito:
$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$ o $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$

Def.: $\int_a^b f$ Converge Absolutamente si $\int_a^b |f|$ converge.
$\int_a^b f$ Converge Condicionalmente si $\int_a^b f$ converge pero $\int_a^b |f|$ no converge.

Prop.: $\int_a^b f$ converge absolutamente $\Rightarrow \int_a^b f$ converge condicionalmente.

Def.: Llamamos Función Positiva a $f^+(x)=\begin{cases}|f(x)|, & f(x)\geq 0\\ 0, & f(x)<0\end{cases}$ y Función Negativa a $f^-(x)=\begin{cases}|f(x)|, & f(x)\leq 0\\ 0, & f(x)>0\end{cases}$.

Prop.: $\int_a^b |f|=\int_a^b f^+ + \int_a^b f^-$

Prop.: Si $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ o $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge
$\Leftrightarrow F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ está acotada superiormente o $\int_x^b f(t)\,dt$ está acotada inferiormente.

Prop.: Sea f y g integrables, $f,g\geq 0$;
1. Si $f(t)\leq g(t)$ y $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Si $f(t)\leq g(t)$ y $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Prop.: Sea $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrables, $f,g\geq 0$, $\lim_{t\to b}\frac{f(t)}{g(t)}=l$;
1. Si $l\neq 0$ y $l\neq\infty \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ diverge o converge $\Leftrightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ diverge o converge.
2. Si $l=0 \Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge.
3. Si $l=\infty \Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ diverge $\Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Prop.: $f:[N,\infty)\to\mathbb{R}$ decreciente, $f\geq 0 \Rightarrow \int_N^\infty f(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow \sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ converge.

En $\mathbb{R}^2$

Def.: Definimos a una partición P en rectángulos R_i / $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} R_i \in \mathbb{R}$.

Def.: Llamamos Medida de R_i a $\mu(R_i)$ = Área de $R_i = a \cdot b$.

Def.: Llamamos Diámetro de R_i a $\delta(R_i) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Def.: Análogamente a $\mathbb{R}$, $S(f,P) = \sum_{i=0}^{n} M_i \, \mu(R_i)$, $I(f,P) = \sum_{i=0}^{n} m_i \, \mu(R_i)$

TEOREMA DE FUBINI: Sea $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f es integrable y $\iint_R f \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dy \, dx$.

TEOREMA: Sea D compacto, $f: D \to \mathbb{R}$, R conjunto / $D \subseteq R \Rightarrow$

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Si $\bar{f}$ es integrable en $R \Rightarrow f$ es integrable en D.

Prop.: Sea D compacto $\Rightarrow \mu(D) = \iint_D 1 \cdot dA$.

TEOREMA: Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, φ_1, φ_2 continuas / $\varphi_1 \le \varphi_2 \ \forall x \in [a,b]$, f continua en $D \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y) \, dy \right) dx$

TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE: Sea $D^* \in \mathbb{R}^2$ acotado, $T: D^* \to \mathbb{R}$, $T \in C^3$ / DT es inversible, $D = T(D^*)$, $f: D \to \mathbb{R}$ integrable $\Rightarrow \iint_D f = \iint_{D^*} f \circ T \cdot JT$, $JT = |\det(DT)|$ Jacobiano.

Coordenadas Polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $JT = r$

Coordenadas Cilíndricas: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = z$, $JT = r$

Coordenadas Esféricas: $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = r\cos(\theta)$, $JT = r^2\sin(\theta)$