CURVAS

Def.: Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua llamamos Curva a $C = Im(\alpha)$ y Parametrización de C a α.

Def.: Sea C una curva y α su parametrización llamamos a C Curva Abierta Simple $\Leftrightarrow$ α es inyectiva en $[a,b]$ y Curva Cerrada Simple $\Leftrightarrow$ α es inyectiva en $[a,b)$ y $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Def.: Sea C una curva y α su parametrización la llamamos Parametrización Regular $\Leftrightarrow$ $\alpha \in C^1$, $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in [a,b]$ con C abierta simple y $\alpha \in C^1$, $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in [a,b]$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ con C cerrada simple.

Def.: Sea C una curva y α su parametrización, α inyectiva en $[a,b)$, $t_0 \in [a,b]$ $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$ llamamos Recta Tangente a $L_{p_0} = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha'(t)(t-t_0) + p_0 = x\}$ $\forall t \in \mathbb{R}, p_0 = \alpha(t_0)$.

Def.: Sea C una curva y α su parametrización, α inyectiva en $[a,b)$, $t_0 \in [a,b]$, $\alpha(t_0) = p_0$, $p \in C$, llamamos Recta Secante a $L_p = \{x \in \mathbb{R}^n / (p-p_0)(t-t_0) + p_0 = x\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Prop.: Sea C una curva y α su parametrización regular $\Rightarrow$ $\lim_{p \to p_0} L_p = L_{p_0}$

Def.: Sea C una curva la llamamos Suave $\Leftrightarrow$ $\forall p \in C \; \exists B_r(p) / \exists \alpha$ parametrización regular de C.

Def.: Sea C una curva abierta simple y α su parametrización regular, $h: [c,d] \to [a,b]$ biyectiva, $h \in C^1$, $h'(t) \neq 0$ $\forall t \in [c,d]$ llamamos Reparametrización de C a $\gamma = \alpha \circ h$.

Prop.: Sean C una curva con parametrizaciones regulares $\alpha_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \exists h : [c,d] \to [a,b]$, $h \in C^1$, h biyectiva, $h'(t) \neq 0$ $\forall t \in [c,d]$ / $\alpha_2 = \alpha_1 \circ h$.

Prop.: Sea C una curva y α su parametrización inyectiva y C^1 $\Rightarrow$ $long(C) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$. Esta es la Longitud de Curva

Def.: Sea C una curva y α su parametrización regular llamamos Longitud de Arco a la función $\Lambda : [a,b] \to [0, long(C)]$, $\Lambda(a,t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| \, ds$

Def.: Sea C una curva simple y abierta, α su parametrización regular y f un campo escalar continuo sobre C llamamos Integral de Longitud de Curva a $\int_a^b f(\alpha(t)) \, \|\alpha'(t)\| \, dt$

Def.: Sea C una curva simple y abierta, α su parametrización regular y F un campo vectorial continuo sobre C llamamos Integral Curvilínea a $\int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt$

Prop.: Sea C una curva suave y orientada tal que comienza en P y termina en Q, $P, Q \in \mathbb{R}^3$ y sea F un campo gradiente de f, o sea, $F = \nabla f$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ $\Rightarrow \int_C F \, ds = f(Q) - f(P)$

SUPERFICIES

Def.: Llamamos a $S \in \mathbb{R}^3$ una Superficie $\Leftrightarrow S = Im(T)$ para $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, D un Dominio Elemental, o sea, compacto y cuya frontera es unión de gráficos de funciones, y T continua. Llamamos a T Parametrización de S.

Def.: Sea S una superficie y T su parametrización la llamamos Regular $\Leftrightarrow$ T es inyectiva, $T \in C$ y $\frac{\partial T}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial y} \neq \vec{0}$. Si S admite una parametrización regular la llamamos Suave.

Prop.: Sea S una superficie, $P, P_0 \in S$, Π_0 el plano tangente a S en P_0 con normal $\eta_0 / \|\eta_0\| = 1$ y sea la recta secante $L_P: \lambda \frac{P-P_0}{\|P-P_0\|} + P_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lim_{P \to P_0} \langle L_P, \eta_0 \rangle = 0$

Prop.: Sea S una superficie, $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C$ / $S = Graf(f) \Rightarrow S$ es suave, $\Pi_P: f(p) + \langle \nabla f(p), X - p \rangle$

Def.: Sea S una superficie y $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ su parametrización, $G: D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to D$ biyectiva, $G \in C$ / $\det(DG) \neq 0$ llamamos a $T^* = T \circ G$ Reparametrización de T.

Prop.: Sea S una superficie con parametrizaciones regulares T_1 y $T_2 \Rightarrow T_2$ es una reparametrización de T_1.

Prop.: Sea S una superficie suave y T su parametrización regular
$\Rightarrow$ $Área(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial T}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial y} \right\| dx\,dy$, este es el Área de una Superficie.

Def.: Sea S una superficie suave y T su parametrización regular, $f: S \to \mathbb{R}$ continua en S llamamos Integral de Superficie a $\iint_D f(T(x,y)) \left\| \frac{\partial T}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial y} \right\| dx\,dy$

Prop.: Sea S suave y $f: S \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \exists p \in S / \iint_S f\,dS = f(p)\,Área(S)$

Prop.: Sea S una superficie dada en forma implícita, o sea, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0\}$ donde $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C$, $\nabla f(x,y,z) \neq \vec{0}$ $\Rightarrow \Pi_p: \langle \nabla f(p), X - p \rangle = 0$, S es localmente suave.

Prop.: Sea S una superficie suave $\Rightarrow \eta(p) = \dfrac{\frac{\partial T}{\partial x}(x_0,y_0) \times \frac{\partial T}{\partial y}(x_0,y_0)}{\left\| \frac{\partial T}{\partial x}(x_0,y_0) \times \frac{\partial T}{\partial y}(x_0,y_0) \right\|}$ $\forall p = T(x_0,y_0) \in S^\circ$.

S está orientada por T.

Def.: Sea S una superficie suave orientada por η un campo vectorial continuo, y F un campo vectorial continuo en S llamamos Flujo de F a través de S a $\iint_S \langle F, \eta \rangle dS$.

TEOREMAS INTEGRALES

Def.: Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región la llamamos de Tipo I si x se puede escribir en función de y, Tipo II si y se puede escribir en función de x y Tipo III si es Tipo I y Tipo II.

Def.: Sea C una curva cerrada, simple y suave a trozos que encierra una región R se dice que C está orientada Positivamente si su parametrización regular α si recorre R dejándola del lado izquierdo, o sea, en sentido anti-horario. Análogamente se define Orientada Negativamente y se nota C^+ y C^- respectivamente.

TEOREMA DE GREEN: Sea F un campo vectorial / $F=(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)})$, $P, Q: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F \in C$, C una curva cerrada, simple y suave a trozos que encierra una región R de Tipo III / $R \subseteq A$

$$\Rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{C^+} F\,ds = \int_{C^+} P\,dx + Q\,dy$$

TEOREMA: Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región de Tipo III $\Rightarrow \text{Área}(R) = \frac{1}{2}\int_{\partial R^+} -y\,dx + x\,dy$

Def.: Sea $F=(P,Q,R)$ un campo vectorial diferenciable y $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ el vector operador Nabla llamamos Rotor de F al campo definido como

$$Rot(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \nabla \times F$$

TEOREMA: Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2 \Rightarrow \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$

Def.: Sea $F=(P,Q,R)$ un campo vectorial diferenciable llamamos Divergencia de F al escalar $Div(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot F$

Def.: Sea $F=(P,Q)$ un campo vectorial diferenciable llamamos Rotor Escalar a $\|\nabla \times F\| = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$, η su normal unitaria exterior a ∂D, $F=(P,Q) \in C^2$ un campo vectorial en una región de Tipo III $R / D \subseteq R$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} F \cdot \eta\,ds = \iint_D \nabla \cdot F\,dx\,dy$$

TEOREMA DE STOKES: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ su parametrización regular, D unión de regiones Tipo III, $T \in C^2$, ∂D^+ su borde suave a trozos, S orientada por T, $\partial S^+ = T(\partial D^+)$ y $F: S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, $F \in C \Rightarrow \iint_S \nabla \times F\,dS = \int_{\partial S^+} F\,ds$

Def.: Sea F un campo C^1 en $\mathbb{R}^3$ salvo quizás en finitos puntos llamamos a F Conservativo si:

① $\oint F\,ds = 0$

② $\int_{C_1} F\,ds = \int_{C_2} F\,ds$ para C_1 y C_2 curvas que empiezan y terminan en los mismos puntos.

③ $F = \nabla f$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

④ $\nabla \times F = \vec{0}$

Def.: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie si: $S = \bigcup S_i$, S_i superficies que son gráficos de funciones de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ entonces llamamos a S __Cerrada__. S_i son las __Caras__ de S y deben enfrentarse con normal interior o exterior.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (GAUSS): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región de Tipo $\boxed{IV}$ y $\partial\Omega$ una superficie cerrada con normal exterior y F un campo vectorial diferenciable $\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} F\,ds = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx\,dy\,dz$

Prop.: Sea F un campo $C^1 / \nabla \cdot F = 0 \Leftrightarrow \iint_S F\,ds = 0 \ \forall S$ superficie cerrada.

Prop.: Sea F un campo $C^2 / \nabla \cdot F = 0 \Rightarrow \exists G$ un campo$/ \ F = \nabla \times G$.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Def.: Sea F una función $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$ donde t es una variable y $x(t)$ una función llamamos a F __Ecuación Diferencial Ordinaria__. Llamamos también __Orden__ de la ecuación al mayor orden de derivada de la ecuación.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES: $x' = f(x) \cdot g(t) \Rightarrow \frac{x'}{f(x)} = g(t) \Rightarrow \int \frac{x'}{f(x)}\,dx = \int g(t)\,dt$

Def.: Sea $f(t,x)$ una función se la llama __Homogénea de Grado 0__ si: $f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Def.: Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones $C^1 / \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ llamamos __Ecuación Diferencial Exacta__ a una ecuación de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

MÉTODO DE FACTOR INTEGRANTE. $x' + P(t)x = Q(t)$, __Propongo__: $\begin{cases} x = K(t) \cdot G(t) \\ G'(t) + P(t)G(t) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (KG)' + PKG = Q \Rightarrow K'G + KG' + PKG = Q \Rightarrow K'G + K\underbrace{(G' + PG)}_{=0} = Q$$

$$\Rightarrow K' = \frac{Q}{G}$$

MÉTODO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS: $P\,dx + Q\,dy = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ __Tomo__: $F = (P,Q)$

$\Rightarrow \nabla \times F = 0 \Rightarrow F$ es conservativo $\Rightarrow \exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \ F = \nabla f$

$\Rightarrow S = \{x, y \in \mathbb{R}^2 / \ f(x,y) = c, \ c \in \mathbb{R}\}$ es solución del sistema

Def.: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ llamamos a f __Globalmente Lipschitz__ en la variable x si es continua y si $\exists L > 0 / |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in I$. Llamamos a f __Localmente Lipschitz__ si $\forall J \subseteq I$ intervalo cerrado y $\Omega \in \mathbb{R}$ compacto f es Lipschitz en $J \times \Omega$.

TEOREMA DE EXISTENCIA: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ Lipschitz en x, $r \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$:

1. Si $r \in I^\circ \Rightarrow \exists \lambda > 0$, $x: [r-\lambda, r+\lambda] \to \mathbb{R}$, $x \in C^1$ /
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in [r-\lambda, r+\lambda] \\ x(r) = \xi \end{cases}$$

2. Si $r = \mathrm{Inf}(I) \Rightarrow \exists \lambda > 0$, $x: [r, r+\lambda] \to \mathbb{R}$, $x \in C^1$ /
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in [r, r+\lambda] \\ x(r) = \xi \end{cases}$$

3. Si $r = \mathrm{Sup}(I) \Rightarrow \exists \lambda > 0$, $x: [r-\lambda, r] \to \mathbb{R}$, $x \in C^1$ /
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in [r-\lambda, r] \\ x(r) = \xi \end{cases}$$

Def.: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, $f_n: I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ llamamos $\{f_n\}$ una Sucesión de Funciones. Llamamos a esta sucesión Uniformemente de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in I$.

LEMA: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ Lipschitz en x, $r \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$ / se cumple el teorema anterior $\Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $x(t) = \xi + \int_r^t f(s, x(s))\, ds$

Prop.: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas uniformemente de Cauchy, $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists f_0: I \to \mathbb{R}$ continua / $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f_0(x)$ $\forall x \in I$, $\lim_{n \to \infty} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I f_0(x)\, dx$.

LEMA DE GRONWAL: Sea $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $a \in I$ $g \geq 0$, $g(t) \leq A + B\left|\int_a^t g(s)\, ds\right|$ $\forall t \in I$, $A, B > 0 \Rightarrow g(t) \leq A e^{B|t-a|}$ $\forall t \in I$.

TEOREMA: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz en x, $r \in I$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2: [r, \eta] \subseteq I \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in C^1$ / $\begin{cases} x_i'(t) = f(t, x_i(t)) & \forall t \in [r, \eta] \\ x_i(r) = \xi_i & \forall i \in [1,2] \subseteq \mathbb{N} \end{cases}$

$$\Rightarrow \exists C = C(\eta) > 0 / |x_1(t) - x_2(t)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|$$

Def.: Sea X una solución del sistema $x' = f(t,x)$, $x_{(r)} = \xi$. $f: I\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, $r\in I$, $\xi \in \mathbb{R}$

la llamamos <u>Maximal</u> si está definida en $J_0 = \cup\{J \subseteq I / r\in J, \exists$ solución en $J\}$. Esta solución no se puede extender. Si $J_0 = I$ se llama a la solución <u>Global</u>.

Prop.: Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R} / [t_1, t_2] \subseteq I$ y f sea Lipschitz en el intervalo
$\Rightarrow$ La solución maximal del sistema es global.

Def.: Sea $I\subseteq\mathbb{R}$, $F: I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo llamamos a la ecuación ordinaria $X'_N(t) = F(t, \vec{x}(t))$ su <u>Sistema de Ecuaciones</u>, $N = n-2$, $\vec{X}(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_N(t))$,

Def.: Sea $I\subseteq \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $F: I\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ llamamos a F <u>Globalmente Lipschitz</u> en $\vec{x}$ $\Leftrightarrow$ F es continua, $\exists L>0 / \|F(t,\vec{x}) - F(t,\vec{y})\| \leq L\|\vec{x}-\vec{y}\| \ \forall t\in I$, $\vec{x},\vec{y}\in\Omega$. Llamamos a F <u>Localmente Lipschitz</u> $\Leftrightarrow \forall I' \subseteq I$ cerrado, $\Omega' \subseteq \Omega$ compacto F es globalmente Lipschitz.

TEOREMA DE EXISTENCIA Análogo al teorema anterior pero ahora en $\mathbb{R}^n$ para un sistema.

Def.: Llamamos <u>Sistema Lineal de Ecuaciones Diferenciales</u> a los sistemas de la forma $A(t)X(t) + X_0(t) = X'(t)$, $X, X_0: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$
$A: I\to\mathbb{R}^{n\times n}$

Si $X_0 = 0 \ \forall t\in I$ llamamos al sistema <u>Homogéneo</u>.

LEMA: Sea $F(t,x) = A(t)X + b(t)$, $b: I\to\mathbb{R}^n$, $\Rightarrow$ F es Lipschitz en x.

TEOREMA: Sea $I\subseteq\mathbb{R}$ cerrado, $A: I\to\mathbb{R}^{n\times n}$ con coeficientes continuos
$\Rightarrow$ Las soluciones para el sistema $X'(t) = A(t)X(t)$, $X: I\to\mathbb{R}^n$ existen en un espacio vectorial de dimensión n.

NOTA

Prop.: Sean X_i soluciones del sistema $X' = AX$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$, $X, X_i : I \to \mathbb{R}^n$, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ continuo, $r \in I$, X_i son L.I. $\Leftrightarrow$ $X_{i(r)}$ son L.I.

Def.: Sea $\{X_i\}$, $i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$ una base de soluciones de $X' = AX$ llamamos Matriz Fundamental del sistema a la matriz

$$Q_{(t)} = \left(\begin{array}{c} | \\ X_{i(t)} \\ | \end{array} \right)$$

TEOREMA: Sea $f_{(t)} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}_{(t)}$, $f, a_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a_{n(t)} = 1 \ \forall t \in I$:

1. $\forall r \in I$, $y = (y_i) \ / \ x^{(i)}_{(r)} = y_{i(t)}$ existe una única solución y es global.
2. Si $f \equiv 0 \Rightarrow$ El conjunto de soluciones forma un espacio vectorial de dimensión $n-1$.

Def.: Sea $\{X_i\}$, $i \in [0, n] \subseteq \mathbb{N}$ una base de soluciones de $f_{(t)} = \sum_{i=0}^{n} a_{i(t)} X^{(i)}_{(t)}$, $f, a_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a_{n(t)} \equiv 1$ llamamos Wronskiano a

$$W = \det \begin{pmatrix} X_i \\ X_i' \\ \vdots \\ X_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

TEOREMA: Sea $X' = AX + b$, $X : I \to \mathbb{R}^n$, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ continua, $b : I \to \mathbb{R}^n$ continua, $X_{p(t)}$ es una solución del sistema y $X_{h(t)}$ la solución del sistema homogéneo asociado $\Leftrightarrow$ $S = \{X : I \to \mathbb{R}^n \ / \ X = X_p + X_h\}$ es el Conjunto de soluciones del sistema.

TEOREMA: Sea $\{X_i\}$, $i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$ una base de soluciones del sistema homogéneo asociado $\Rightarrow \exists \ C_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C_i \in C^1$ / $X_{p}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{i(t)} X_{i(t)}$ solución del sistema. Cumplen que $Q_{(t)} \left(\begin{array}{c} | \\ C'_{i(t)} \\ | \end{array} \right) = b_{(t)}$.

Def.: Sea X una solución del sistema $X' = F(x)$, $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$, $X: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $X \in C^1$ llamamos a la solución <u>Estacionaria</u> si $X(t) = X_0 \ \forall t \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $F(x_0) = 0$ llamamos a X_0 <u>Punto de Equilibrio</u>.

LEMA: Sean $X_1: I_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $X_2: I_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones maximales del sistema $\Rightarrow \{X_1(t) : t \in I_1\} \cap \{X_2(t) : t \in I_2\} = \phi$ o

$$\{X_1(t) : t \in I_1\} = \{X_2(t) : t \in I_2\}$$

LEMA: Sea X una solución de $X' = F(x)$, $X: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

1. Si $t_0 \in I$, $X(t_0) = X_0$, $X(t) \neq X_0 \ \forall t \in I \setminus \{t_0\} \Rightarrow F(x_0) \neq 0$.
2. Si $\lim_{t \to \pm\infty} X(t) = X_0 \Rightarrow F(x_0) = 0$.