Finales Resueltos de Probabilidades y Estadística

Federico Yulita

Verano, 2023

Esta materia la cursé el primer cuatrimestre del 2019 con Matthieu Jonckheere como docente de las clases teóricas y Pablo Groisman como JTP. Si querés ver el resto de mis apuntes los podés encontrar en mi blog.

Índice

1. 09/12/2021

1.1. Ejercicio 1

Dar la definición de una medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Demuestre a partir de la definición que $\mathbb{P}\left(A^{'}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ y que si $B \subseteq A$ entonces $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

Resolución Sea $\mathcal{S}$ el conjunto que contiene todos los posibles resultados de un experimento (llamado *Espacio Muestral*), sea A un(os) posible(s) resultado(s) del experimento (llamado *Evento*) tal que $A \subseteq \mathcal{S}$ y sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathcal{S})$ el conjunto que contiene todos los posibles eventos (llamado *Espacio de Eventos*) entonces definimos las probabilidad como:

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \, / \mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1 \wedge \left(\{A_n\}_{n \in [1,N] \subseteq \mathbb{N}} / A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j \implies \mathbb{P}\left(\cup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) \right)$$

Es decir, la probabilidad es una función que toma un evento del espacio de eventos y devuelve un número entre 0 y 1. Además, cumple que $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1$ (o sea que la probabilidad de que suceda algún evento es de 1) y cumple que si dos (o más) eventos son disjuntos entonces la probabilidad de que suceda alguno de estos eventos (o todos) es igual a la suma de las probabilidades de cada evento.

Habiendo definido rigurosamente la probabilidad veamos que se cumplen las propiedades que nos propone el enunciado. Veamos que si $B \subseteq A$ entonces $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A \backslash B) \cup (A \cap B)) \\ (A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset \to &= \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ B \subseteq A \to &= \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

Ahora veamos que $\mathbb{P}\left(A^{'}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A^{'}\right) &= \mathbb{P}(\mathcal{S} \backslash A) \\ A \subseteq \mathcal{S} \to &= \mathbb{P}(\mathcal{S}) - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1 \to &= 1 - \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

1.2. Ejercicio 2

Dar la definición de una medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Demuestre a partir de la definición que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Resolución La definición ya la di en el ejercicio anterior, así que veamos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Para eso, tomemos $\tilde{A} = A$ y $\tilde{B} = B \backslash A$. Notemos:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cap \tilde{B} &= A \cap (B \backslash A) \\ &= A \cap \left(B \cap A^{'}\right) \\ &= A \cap \left(A^{'} \cap B\right) \\ &= \left(A \cap A^{'}\right) \cap B \\ &= \emptyset \cap B \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} \cup \tilde{B} &= A \cup (B \backslash A) \\
&= A \cup \left(B \cap A^{'}\right) \\
&= (A \cup B) \cap \left(A \cup A^{'}\right) \\
&= (A \cup B) \cap \mathcal{S} \\
&= A \cup B
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}\left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) \\
\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset \rightarrow &= \mathbb{P}\left(\tilde{A}\right) + \mathbb{P}\left(\tilde{B}\right) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \\
\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \rightarrow &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}
$$

En el ejercicio anterior demostré que $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

1.3. Ejercicio 3

En una muestra de 100 personas hay 13 enfermos no vacunados, 2 enfermos vacunados, 75 sanos vacunados y 10 sanos no vacunados. Elegimos una persona al azar y vemos que está enferma. ¿Cuál es la probabilidad de que no se haya vacunado?

Resolución Para resolver este ejercicio hagamos una tabla con los datos:

	Sanos	Enfermos	Total
Vacunados	75	2	77
No Vacunados	10	13	23
Total	85	15	100

Notemos entonces que el 77 % de la muestra está vacunada y 23 % no. También, notemos que 85 % de la muestra está sana y 15 % está enferma. Como 23 % de la muestra no está vacunada enonces la probabilidad de que al tomar a una persona al azar esta persona no esté vacunada es del 23 %.

1.4. Ejercicio 4

Una urna tiene 4 bolas negras y 3 rojas. Sacamos tres bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola salga negra y la tercera salga roja?

Resolución Tomemos B_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, como el evento que denota el color de la i-ésima bola que se saca de la urna y tomemos $N =$ Negra y $R =$ Roja. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}((B_1 = N) \cap (B_3 = R)) &= \mathbb{P}((B_1 = N) \cap (B_2 = N) \cap (B_3 = R)) + \mathbb{P}((B_1 = N) \cap (B_2 = R) \cap (B_3 = R)) \\
&= \frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{3}{2+3} + \frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{2}{3+2} \\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

1.5. Ejercicio 5

Enuncie y demuestre la fórmula de probabilidad total y el Teorema de Bayes.

Resolución La Fórmula de Probabilidad Total establece que si $\{B_i\}_{i\in[1,n]\subseteq\mathbb{N}}$ es una partición del espacio muestral entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

Para demostrar, primero veamos que $(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j)=\emptyset\,\forall i\neq j$:

$$\begin{aligned}
(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j) &= (A\cap B_i)\cap(B_j\cap A)\\
&= ((A\cap B_i)\cap B_j)\cap A\\
&= (B_j\cap(B_i\cap A))\cap A\\
&= ((B_j\cap B_i)\cap A)\cap A\\
B_i\cap B_j=\emptyset\,\forall i\neq j \rightarrow &= (\emptyset\cap A)\cap A\\
&= \emptyset\cap A\\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Entonces, notemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A\cap\mathcal{S})\\
&= \mathbb{P}\left(A\cap\left(\cup_{i=1}^{n}B_i\right)\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)\right)\\
(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j)=\emptyset\,\forall i\neq j\rightarrow &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap B_i)\\
\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)\rightarrow &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)
\end{aligned}$$

El Teorema de Bayes establece que:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_i|A) &= \frac{\mathbb{P}(B_i\cap A)}{\mathbb{P}(A)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(A\cap B_i)}{\mathbb{P}(A)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)}\\
\text{Fórmula de Probabilidad Total}\rightarrow &= \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}
\end{aligned}$$

1.6. Ejercicio 6

Sea U una variable uniforme en $[0,1]$ entonces para $u\in[0,1]$ definimos:

$$h(u) = \text{máx}\left(\{u, 1-u\}\right)$$

Calcule la función de densidad de $h(U)$, su distribución acumulada, esperanza y varianza.

Resolución Antes de largarnos a hacer cuentas notemos que como $h(U) = \text{máx}(\{U, 1-U\})$ y como $U \in [0,1]$ entonces $h(U) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Entonces, debemos tener en cuenta que el rango de $h(U)$ es $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(h(U) \leqslant h) &= \mathbb{P}(\text{máx}(\{U, 1-U\}) \leqslant h) \\
&= \mathbb{P}(u \leqslant h \,\forall u \in \text{máx}(\{U, 1-U\})) \\
&= \mathbb{P}((1-U \leqslant h) \cap (U \leqslant h)) \\
&= \mathbb{P}(1-h \leqslant U \leqslant h) \\
&= \int\limits_{1-h}^{h} \mathrm{d}x \\
&= 2h-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}(h(U) = h) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\mathbb{P}(h(U) \leqslant h) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Acá es cuando debemos recordar que al hacer cuentas asumimos siempre que $h(U) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Por lo tanto, la distribución puntual de $h(U)$ es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(h(U) = h) &= 2\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(h) \\
&= \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right)
\end{aligned}$$

Es decir, $h(U) \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. De la misma forma, la distribución acumulada de $h(U)$ es:

$$\mathbb{P}(h(U) \leqslant h) = (2h-1)\,\mathbb{I}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(h)$$

Ahora, calculemos la esperanza y la varianza de $h(U)$. Como $h(U) \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ esto es muy simple:

$$\begin{aligned}
E(h(U)) &= \frac{\frac{1}{2}+1}{2} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(h(U)) &= \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{12} \\
&= \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

1.7. Ejercicio 7

Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además, se supondrá que estos tiempos son independientes. Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?

Resolución Tomemos la distribución de X e Y como $f_X = f_Y = \mathcal{U}(0, 60)$ que indica en qué minuto entre las 8 y 9 de la noche llegan al cine. Además, nos dicen que $X \perp Y$, así que si tomamos f_{XY} como la distribución puntual de X e Y nos queda que:

$$\begin{aligned}
f_{XY}(x,y) &= f_X(x)\,f_Y(y) \\
&= \left(\frac{1}{60}\right)^2 \mathbb{I}_{[0,60]}(x)\,\mathbb{I}_{[0,60]}(y)
\end{aligned}$$

Para que Alicia y José se desencuentren sus llegadas deben diferir en más de 10 minutos. Es decir, $X+10<Y$ si Alicia llega $(X<Y)$ antes o $Y+10<X$ si José llega antes $(Y>X)$. Entonces, calculemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(((X+10<Y)\cap(X<Y))\cup((Y+10<X)\cap(X>Y))\right) &= \mathbb{P}\left((X+10<Y)\cap(X\leqslant Y)\right)+\mathbb{P}\left((Y+10<X)\cap(X>Y)\right)\\
&= \int_0^{y-10}\int_{10}^{60}\left(\frac{1}{60}\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{10}^{60}\int_0^{x-10}\left(\frac{1}{60}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
\text{Fubini}\rightarrow &= \left(\frac{1}{60}\right)^2\left(\int_{10}^{60}\int_0^{y-10}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{10}^{60}\int_0^{x-10}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{60}\right)^2\int_{10}^{60}\int_0^{y-10}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= 2\left(\frac{1}{60}\right)^2\int_{10}^{60}(y-10)\,\mathrm{d}y\\
&= 2\left(\frac{1}{60}\right)^2\frac{(60)^2-(10)^2}{2}-2\cdot 10\cdot\left(\frac{1}{60}\right)^2(60-10)\\
&= \frac{25}{36}
\end{aligned}
$$

1.8. Ejercicio 8

En un día una gallina pone N huevos donde $N\sim\mathcal{P}(\lambda)$. Independientemente de la cantidad de huevos puestos, de un huevo cualquiera nace un pollito con probabilidad p. Hallar la distribución de la cantidad de pollitos nacidos.

Resolución Tenemos que la cantidad de huevos que pone la gallina es $N\sim\mathcal{P}(\lambda)$ y que dado un huevo la probabilidad de que nazca un pollito es de p. Entonces, tomemos V como la variable aleatoria que indica si nace un pollito de un huevo tal que $V\sim\mathrm{Be}(p)$. Como queremos saber cuántos pollitos nacen en N huevos entonces como cada nacimiento es una variable Bernoulli la variable aleatoria X que indica la cantidad de pollitos nacidos es una binomial, $X\sim\mathrm{B}(N,p)$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=x) &= \sum_{n=x}^{\infty}\mathbb{P}(X=x|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)\\
&= \sum_{n=x}^{\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda)\\
&= \exp(-\lambda)\frac{p^x}{x!}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-x}\lambda^n}{(n-x)!}\\
&= \exp(-\lambda)\frac{(\lambda p)^x}{x!}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!}\\
&= \exp(-\lambda)\frac{(\lambda p)^x}{x!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n}}{n!}\\
&= \exp(-\lambda)\frac{(\lambda p)^x}{x!}\exp(\lambda(1-p))\\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!}\exp(-\lambda p)\\
&= \mathcal{P}(\lambda p)
\end{aligned}
$$

O sea que $X\sim\mathcal{P}(\lambda p)$.

1.9. Ejercicio 9

Calcule la esperanza de una variable binomial de parámetros n y p.

Resolución

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,((n-1)-(x-1))!} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} \\
m \overset{\text{def}}{:=} n-1,\ y \overset{\text{def}}{:=} x-1 \to &= np \underbrace{\sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y}}_{=1} \\
&= np
\end{aligned}$$

1.10. Ejercicio 10

Sea el vector aleatorio (X, Y) con distribución:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x \in \{1,2,3,4\}) \wedge (y \in \{1,2,3,4\}) \wedge (y \leqslant x) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Calcular el coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$ entre X e Y y decidir si X e Y son independientes.

Resolución Empecemos calculando las esperanzas:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{4} \sum_{y=1}^{x} \frac{x}{10} \\
&= \sum_{x=1}^{4} \frac{x^2}{10} \\
&= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{10} \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=1}^{4} \sum_{x=y}^{4} \frac{y}{10} \\
&= \sum_{y=1}^{4} \frac{y}{10}(5-y) \\
&= \frac{1+2+3+4}{2} - \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{10} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ahora calculemos las varianzas:

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
&= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{x} \frac{x^2}{10} - 3^2 \\
&= \sum_{x=1}^{4} \frac{x^3}{10} - 9 \\
&= \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{10} - 9 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 \\
&= \sum_{y=1}^{4}\sum_{x=y}^{4} \frac{y^2}{10} - 2^2 \\
&= \sum_{y=1}^{4} \frac{y^2}{10}(5-y) - 4 \\
&= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{2} - \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{10} - 4 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la covarianza:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{x} \frac{xy}{10} - 3\cdot 2 \\
&= \sum_{x=1}^{4} \frac{x}{10}\frac{(x+1)x}{2} - 6 \\
&= \sum_{x=1}^{4} \left(\frac{x^3}{20} + \frac{x^2}{20}\right) - 6 \\
&= \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{20} + \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{20} - 6 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente de correlación es:

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1\cdot 1}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como $\rho(X,Y) \neq 0 \implies X \not\perp Y$.

1.11. Ejercicio 11

Se lanza un dado equilibrado. Notamos X al número obternido e $Y = 1$ si el número es par e $Y = 0$ si no. Calcule $E(X|Y=1)$ y $E(Y|X \leqslant 4)$.

Resolución Empecemos por calcular la distribución de X e Y:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (X \in \{1,3,5\}) \wedge (Y = 0) \\ \frac{1}{6} & (X \in \{2,4,6\}) \wedge (Y = 1) \end{cases}$$

Entonces, las distribuciones que vamos a usar son:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x | Y = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in \{2,4,6\} \\ 0 & x \notin \{2,4,6\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y = y | X \leqslant 4) = \frac{1}{2}$$

Ahora si calculemos las esperanzas que nos piden:

$$\begin{aligned} E(X | Y = 1) &= \sum_{x=1}^{6} x\mathbb{P}(X = x | Y = 1) \\ &= \sum_{x=1}^{3} \frac{2x}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y | X \leqslant 4) &= \sum_{y=0}^{1} y\mathbb{P}(Y = y | X \leqslant 4) \\ &= \sum_{y=0}^{1} \frac{y}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.12. Ejercicio 12

Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \lambda^2 \exp(-\lambda y) \mathbb{I}_{\{0<x<y\}}(x, y)$$

¿Qué distribución tiene $X | Y = y$ para $y > 0$?

Resolución Notemos:

$$f_{X|Y=y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Calculemos entonces la densidad marginal de Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \exp(-\lambda y) \mathbb{I}_{\{y>0\}}(y) \int_0^y \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 y \exp(-\lambda y) \mathbb{I}_{\{y>0\}}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f_{X|Y=y}(x,y) &= \frac{\cancel{\lambda^2}\cancel{\exp(-\lambda y)}\mathbb{I}_{\{0<x<y\}}(x,y)}{\cancel{\lambda^2}y\cancel{\exp(-\lambda y)}\mathbb{I}_{\{y>0\}}(y)} \\
&= \frac{1}{y}\mathbb{I}_{(0,y)}(x) \\
&= \mathcal{U}(0,y)
\end{aligned}$$

1.13. Ejercicio 13

Sea F la función de distribución acumulada de una distribución de probabilidad f. Supongamos para simplificar que F es una biyección de $\mathbb{R}$ en $(0,1)$. Demuestre que si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ entonces $Y \overset{\text{def}}{:=} F^{-1}(U)$ tiene distribución f.

Resolución

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}\left(F^{-1}(U) \leqslant y\right) \\
&= \mathbb{P}(U \leqslant F(y)) \\
&= F(y)\,\mathbb{I}_{(0,1)}(F(y)) \\
F : \mathbb{R} \to (0,1) \to \quad &= F(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}(Y = y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathbb{P}(Y \leqslant y) \\
&= F^{'}(y) \\
&= f(y)
\end{aligned}$$

1.14. Ejercicio 14

Sea $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ demuestre que $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Resolución Tomemos $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) \\
&= \mathbb{P}(U \leqslant 1 - \exp(-\lambda x)) \\
&= \mathbb{P}(U \leqslant 1 - \exp(-\lambda x)) \\
&= (1 - \exp(-\lambda x))\,\mathbb{I}_{(0,1)}(1 - \exp(-\lambda x)) \\
(1 - \exp(-\lambda x)) : (0,\infty) \to (0,1) \to \quad &= (1 - \exp(-\lambda x))\,\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}(X = x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{P}(X \leqslant x) \\
&= \lambda \exp(-\lambda x)\,\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \\
&= \mathcal{E}(\lambda)
\end{aligned}$$

1.15. Ejercicio 16

Sea $U_n \sim \mathcal{U}\left(\left\{\frac{i}{n}\right\}_{i\in[1,n]\subseteq\mathbb{N}}\right)$ calcule el límite en distribución de U_n cuando $n \to \infty$.

Resolución

$$\mathbb{P}(U_n = u) = \frac{1}{n}\mathbb{I}_{u\in\left\{\frac{i}{n}\right\}}(u)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbb{P}(U_n \leqslant u) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nu\rfloor}\frac{1}{n}\mathbb{I}_{(0,1)}(u)\\ &= \frac{\lfloor nu\rfloor}{n}\mathbb{I}_{(0,1)}(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(U_n \leqslant u) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor nu\rfloor}{n}\mathbb{I}_{(0,1)}(u)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor nu\rfloor}{nu}u\mathbb{I}_{(0,1)}(u)\end{aligned}$$

Notemos que $\frac{\lfloor nu\rfloor}{nu} \in (\frac{\lfloor nu\rfloor}{\lfloor nu\rfloor+1}, 1]$ y que tiende a 1 cuando $n \to \infty$ (es como el límite de $\frac{x}{x+1}$). Entonces, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(U_n \leqslant u) = u\mathbb{I}_{(0,1)}(u)$. Por lo tanto, tenemos que $\lim_{n\to\infty} U_n \sim \mathcal{U}(0,1)$.

1.16. Ejercicio 17

Enunciar y demostrar las desigualdades de Markov y Chebyshev.

Resolución La desigualdad de Markov establece que si X es una variable aleatoria con esperanza finita tal que $X \geqslant 0$ entonces:

$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(X)}{\varepsilon}\ \forall \varepsilon > 0$$

Demostrémosla:

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^\infty x\mathbb{P}(X = x)\,\mathrm{d}x\\ \varepsilon > 0 \to &= \int_0^\varepsilon x\mathbb{P}(X = x)\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty x\mathbb{P}(X = x)\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_\varepsilon^\infty x\mathbb{P}(X = x)\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \varepsilon\int_\varepsilon^\infty \mathbb{P}(X = x)\,\mathrm{d}x\\ &= \varepsilon\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon)\\ \therefore \mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) &\leqslant \frac{E(X)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

La desigualdad de Chebyshev establece que:

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}\ \forall \varepsilon > 0$$

Demostrémosla:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}\left((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right)\\ \text{Desiguladad de Markov} \to &\leqslant \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{\varepsilon^2}\\ &= \frac{V(X)}{\varepsilon^2}\ \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

1.17. Ejercicio 18

Enuncie y demuestre la Ley de Grandes Números para variables aleatorias con segundo momento finito (admitiendo Chebyshev).

Resolución Sea X una variable aleatoria con varianza finita y sea $\boldsymbol{X}$ un modelo de X entonces la Ley de Grandes números establece que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - E\left(X\right)\right| > \varepsilon\right) = 0\,\forall\varepsilon > 0$$

Demostrémosla:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - E\left(X\right)\right| > \varepsilon\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - E\left(\bar{X}_n\right)\right| > \varepsilon\right) \\
\text{Desigualdad de Chebyshev} \to &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{V\left(\bar{X}_n\right)}{\varepsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{V\left(X\right)}{\varepsilon^2} \\
&= 0\,\forall\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

1.18. Ejercicio 19

Sea $X_n \sim \mathcal{P}\left(n\lambda\right)$ demuestre que $\frac{X_n}{n}$ converge en probabilidad a λ.

Resolución Notemos:

$$\begin{cases} E\left(X_n\right) = n\lambda \\ V\left(X_n\right) = n\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \\
\text{Desigualdad de Chebyshev} \to &\leqslant \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{V\left(X_n\right)}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{1}{n}\frac{\lambda}{\varepsilon^2} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,\forall\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$$

1.19. Ejercicio 20

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con función de distribución exponencial de parámetro λ y sean $Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. independientes de las X_i con distribución uniforme en $(0,1)$, considerar las variables:

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i \leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)$$

Hallar la esperanza y la varianza de Z_n y el valor límite en probabilidad de Z_n.

Resolución

$$
\begin{aligned}
E\left(Z_n\right) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\\
Y_i, X_i \text{ i.i.d.}, X_i\perp Y_i \rightarrow &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\leqslant 1\right)\mathbb{P}\left(Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \lambda\exp\left(-\lambda x\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\exp\left(-\lambda\right)\right)\\
&= \frac{1-\exp\left(-\lambda\right)}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V\left(Z_n\right) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)^2\right)-\left(E\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)-\left(E\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{P}\left(X_i\leqslant 1\right)\mathbb{P}\left(Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right)-\left(\mathbb{P}\left(X_i\leqslant 1\right)\mathbb{P}\left(Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\exp\left(-\lambda\right)}{2}-\left(\frac{1-\exp\left(-\lambda\right)}{2}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1-\exp\left(-\lambda\right)}{2}-\frac{1-2\exp\left(-\lambda\right)+\exp\left(-2\lambda\right)}{4}\right)\\
&= \frac{1-\exp\left(-2\lambda\right)}{4n}
\end{aligned}
$$

Para calcular la convergencia de Z_n notemos que en su definición es la media muestral de $\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)$. Por la ley de grandes números sabemos que:

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|Z_n - E\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\right|>\varepsilon\right)=0\,\forall\varepsilon>0
$$

Por lo tanto, Z_n converge a:

$$
\begin{aligned}
Z_n &\to E\left(\mathbb{I}_{\{X_i\leqslant 1\}}\left(X_i\right)\mathbb{I}_{\left\{Y_i\leqslant \frac{1}{2}\right\}}\left(Y_i\right)\right)\\
&= \frac{1-\exp\left(-\lambda\right)}{2}
\end{aligned}
$$

1.20. Ejercicio 21

Enuncie el Teorema Central del Límite. Sean $Y_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ demuestre que $\frac{Y_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ converge en distribución a una variable $\mathcal{N}(0,1)$ cuando $n \to \infty$.

Resolución El Teorema Central del Límite establece que si X_i, $i \in [1,n] \subseteq \mathbb{N}$, variables aleatorias i.i.d. entonces si definimos la variable aleatoria:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(X_n)}{\sqrt{\frac{V(X_n)}{n}}}$$

resulta que Z_n converge en distribución a una normal estándar. Con este teorema entonces podemos demostrar lo que la consigna nos exije. Notemos:

$$\begin{cases} E(Y_n) = n\lambda \\ V(Y_n) = n\lambda \end{cases}$$

$$\therefore \frac{Y_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} = \frac{\bar{Y}_n - E(Y_n)}{\sqrt{\frac{V(Y_n)}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

1.21. Ejercicio 22

Los clientes llegan a un banco de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro 3 por minuto, ¿cuál es la probabilidad de que los tres primeros clientes lleguen antes de los 3 primeros minutos?

Resolución Tomemos X como la cantidad de clientes que llegan por minuto. La consigna nos dice que $X \sim \mathcal{P}(3)$. Por lo tanto, si queremos una variable que nos diga cuántos clientes llegan en tres minutos podemos tomar $Y = 3X \sim \mathcal{P}(9)$. Por lo tanto, veamos cuál es la probabilidad de que los primeros tres clientes lleguen en los tres primeros minutos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geqslant 3) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant 2) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{9^k}{k!} \exp(-9) \\ &= 1 - \exp(-9)\left(1 + 9 + \frac{81}{2}\right) \\ &\approx 0.99 \end{aligned}$$

1.22. Ejercicio 23

Consideramos un proceso de Poisson de tasa λ. Calcule la probabilidad de que ocurran simultáneamente los eventos $A = \{\text{Hay 3 llegadas en el intervalo } [0,3]\}$ y $B = \{\text{Hay 4 llegadas en el intervalo } (3,4]\}$.

Resolución Tomemos $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ como la cantidad de llegadas en una unidad de intervalo. Como los intervalos de A y B son disjuntos entonces $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. También, por la falta de memoria sabemos que la probabilidad no cambia si la longitud del intervalo es la misma. Es decir que la probabilidad en el intervalo $(3,4]$ es la misma que en el intervalo $(0,1]$. Notemos que como el intervalo $[0,3]$ es 3 veces la longitud unidad entonces para A vamos a usar la distribución $\mathcal{P}(3\lambda)$. Entonces, tomemos $X_A \sim \mathcal{P}(3\lambda)$ y $X_B \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y calculemos la probabilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(X_A = 3)\mathbb{P}(X_B = 4) \\ &= \left(\frac{(3\lambda)^3}{3!}\exp(-3\lambda)\right)\left(\frac{\lambda^4}{4!}\exp(-\lambda)\right) \\ &= \frac{3}{16}\lambda^7 \exp(-4\lambda) \end{aligned}$$

1.23. Ejercicio 24

Hallar el estimador de momentos de θ para la distribución $\mathcal{U}(-\theta, \theta)$.

Resolución

$$X \sim \mathcal{U}(-\theta, \theta) \implies \begin{cases} E(X) = 0 \\ V(X) = \frac{\theta^2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore E\left(X^2\right) &= V(X) + (E(X))^2 \\ &= \frac{\theta^2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{\theta}_n = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

1.24. Ejercicio 25

Hallar el estimador de máxima verosimilitud de p para la variable $X \sim \mathrm{Be}(p)$.

Resolución

$$\mathrm{Be}(p) = p^x (1-p)^{1-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L} &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p^{X_i} (1-p)^{1-X_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \ln(p) + (1 - X_i)\ln(1-p)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}p} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{p} - \frac{1-X_i}{1-p}\right) \\ &= \frac{n}{p}\bar{X}_n - \frac{n}{1-p}\left(1 - \bar{X}_n\right) \\ &= \frac{n(1-p)\bar{X}_n - np\left(1-\bar{X}_n\right)}{p(1-p)} \\ &= \frac{n\bar{X}_n - np}{p(1-p)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{p}_n = \bar{X}_n$$

1.25. Ejercicio 26

Hallar el estimador de máxima verosimilitud del parámetro a de la distribución:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{-(a+1)} & x \geqslant 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases},$$

donde $a > 1$. ¿Es consistente?

Resolución

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(aX_i^{-(a+1)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(a\right) - \left(a+1\right)\ln\left(X_i\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}a} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a} - \ln\left(X_i\right)\right) \\
&= \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(X_i\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{a}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(X_i\right)}$$

Veamos si es consistente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(X_i\right)} \\
Y \overset{\text{def}}{:=} \ln\left(X\right) \to \quad &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\bar{Y}_n} \\
&= \frac{1}{E\left(Y\right)}
\end{aligned}$$

Busquemos la distribución de $Y = \ln\left(X\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y \leqslant y\right) &= \mathbb{P}\left(\ln\left(X\right) \leqslant y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \leqslant \exp\left(y\right)\right) \\
&= \int_{1}^{\exp(y)} at^{-(a+1)}\mathrm{d}t \\
&= \left(-t^{-a}\right)\Big|_{1}^{\exp(y)} \\
&= 1 - \exp\left(-ay\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}\left(Y = y\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathbb{P}\left(Y \leqslant y\right) \\
&= a\exp\left(-ay\right) \\
&= \mathcal{E}\left(a\right)
\end{aligned}$$

Entonces, sabemos que $E\left(Y\right) = \frac{1}{a}$. Por lo tanto, $\hat{a}_n \to a$ y eso significa que el estimador es consistente.

1.26. Ejercicio 27

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de la distribución:

$$f\left(x;\theta\right) = \exp\left(-\left(x-\theta\right)\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant\theta\}}\left(x\right)$$

Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ. ¿Es consistente?

Resolución

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\left(X_i-\theta\right)\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant\theta\}}\left(X_i\right)\right)\\
&= \begin{cases} n\left(\theta-\bar{X}_n\right) & \text{mín}\left(\{X_i\}\right)\geqslant\theta \\ 0 & \text{mín}\left(\{X_i\}\right)<\theta \end{cases}
\end{aligned}
$$

Notemos que $\mathcal{L}$ es una función creciente de θ así que para maximizar la función debemos tomar el máximo valor posible de θ. Como $\text{mín}\left(\{X_i\}\right)\geqslant\theta$ entonces tomemos $\hat{\theta}_n=\text{mín}\left(\{X_i\}\right)$.

Para ver si el estimador es consistente veamos si es asintóticamente insesgado y si su varianza tiende a cero. Para eso, primero calculemos la distribución del estimador:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n\leqslant t\right) &= \mathbb{P}\left(\text{mín}\left(\{X_i\}\right)\leqslant t\right)\\
&= 1-\mathbb{P}\left(\text{mín}\left(\{X_i\}\right)\geqslant t\right)\\
&= 1-\mathbb{P}\left(X_i\geqslant t\,\forall i\right)\\
X_i \text{ i.i.d.} \rightarrow &= 1-\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\geqslant t\right)\\
&= 1-\left(\mathbb{P}\left(X\geqslant t\right)\right)^n\\
&= 1-\left(1-\mathbb{P}\left(X\leqslant t\right)\right)^n\\
&= \left(1-\left(1-\int_{\theta}^{t}\exp\left(-\left(x-\theta\right)\right)\mathrm{d}x\right)^n\right)\mathbb{I}_{\{t\geqslant\theta\}}\left(t\right)\\
&= 1-\left(1-\left(1-\exp\left(-\left(t-\theta\right)\right)\right)\right)^n\mathbb{I}_{\{t\geqslant\theta\}}\left(t\right)\\
&= 1-\exp\left(-n\left(t-\theta\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n=t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n\leqslant t\right)\\
&= n\exp\left(-n\left(t-\theta\right)\right)
\end{aligned}
$$

O sea que la distribución de $\hat{\theta}_n$ es parecida a una exponencial. Sea $E\sim\mathcal{E}\left(n\right)$ entonces $\hat{\theta}_n=E+\theta$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n=t\right) &= \mathbb{P}\left(E+\theta=t\right)\\
&= \mathbb{P}\left(E=t-\theta\right)\\
&= n\exp\left(-n\left(t-\theta\right)\right)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{cases} E\left(\hat{\theta}_n\right)=\frac{1}{n}+\theta \\ V\left(\hat{\theta}_n\right)=\frac{1}{n^2} \end{cases}
$$

$$
\therefore \begin{cases} \text{lím}_{n\to\infty} b\left(\hat{\theta}_n\right)=0 \\ \text{lím}_{n\to\infty} V\left(\hat{\theta}_n\right)=0 \end{cases}
$$

Por lo tanto, el estimador es consistente.

1.27. Ejercicio 28

Defina el error cuadrático medio (ECM) de un estimador y demuestre que es la suma de la varianza más el cuadrado del sesgo.

Resolución El Error Cuadrático Medio de un estimador es una medida de la diferencia cuadrática media entre el estimador y el parámetro a estimar. Se define así:

$$\mathrm{ECM}\left(\hat{\theta}_n\right) = E\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right)$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ECM}\left(\hat{\theta}_n\right) &= E\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right) + E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2 + 2\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)\left(E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta\right) + \left(E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta\right)^2\right) \\
&= \underbrace{E\left(\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2\right)}_{=V\left(\hat{\theta}_n\right)} + 2E\left(\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)\left(E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta\right)\right) + E\left(\left(E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta\right)^2\right) \\
&= V\left(\hat{\theta}_n\right) + 2E\left(E\left(\hat{\theta}_n\right)\hat{\theta}_n - \theta\hat{\theta}_n - \left(E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2 + \theta E\left(\hat{\theta}_n\right)\right) + \underbrace{\left(E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta\right)^2}_{=b^2\left(\hat{\theta}_n\right)} \\
&= V\left(\hat{\theta}_n\right) + b^2\left(\hat{\theta}_n\right) + 2\left(\cancel{\left(E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2} - \cancel{\theta E\left(\hat{\theta}_n\right)} - \cancel{\left(E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2} + \cancel{\theta E\left(\hat{\theta}_n\right)}\right) \\
&= V\left(\hat{\theta}_n\right) + b^2\left(\hat{\theta}_n\right)
\end{aligned}$$

1.28. Ejercicio 29

Decir si los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud de θ para $X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ son insesgados y/o asintóticamente insesgados.

Resolución Empecemos por calcular los estimadores. Empecemos por el de momento que es el más fácil:

$$E(X) = \frac{\theta}{2} \implies \bar{\bar{\theta}}_n = 2\bar{\theta}_n$$

Ahora calculemos el de máxima verosimilitud:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} -n\ln(\theta) & \max(\{X_i\}) \leqslant \theta \\ 0 & \max(\{X_i\}) > \theta \end{cases}$$

$$\therefore \hat{\theta}_n = \max(\{X_i\})$$

Veamos si el estimador de momentos es insesgado:

$$\begin{aligned}
b\left(\bar{\bar{\theta}}_n\right) &= E\left(\bar{\bar{\theta}}_n\right) - \theta \\
&= 2E\left(\bar{\theta}_n\right) - \theta \\
&= 2\frac{\theta}{2} - \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

O sea que el estimador de momentos es insesgado. Veamos ahora lo mismo para el de máxima verosimilitud:

$$b\left(\hat{\theta}_n\right) = E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta$$

Para calcular $E\left(\hat{\theta}_n\right)$ calculemos primero su distribución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n \leqslant t\right) &= \mathbb{P}\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right) \leqslant t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_i \leqslant t \,\forall i\right) \\
X_i \text{ i.i.d.} \to &= \left(\mathbb{P}\left(X \leqslant t\right)\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\int_0^t \mathrm{d}x\right)^n \mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(t\right) \\
&= \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(t\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n = t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n \leqslant t\right) \\
&= \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}\mathbb{I}_{[0,\theta]}\left(t\right)
\end{aligned}$$

Ahora si, calculemos la esperanza:

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{\theta}_n\right) &= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n \mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{n+1}\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore b\left(\hat{\theta}_n\right) &= \frac{n}{n+1}\theta - \theta \\
&= -\frac{\theta}{n+1} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

O sea que el estimador de máxima verosimilitud es asintóticamente insesgado.

2. 28/09/2020

2.1. Ejercicio 1

Enunciar y probar el Teorema de Bayes. Dar un ejemplo de aplicación de dicho teorema.

Resolución El Teorema de Bayes establece que si $I = \{B_i\}$, $i \in [1, N] \subseteq \mathbb{N}$, es una partición del espacio muestral $\mathcal{S}$ y si A es un evento entonces:

$$\mathbb{P}\left(B_i|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A|B_i\right)\mathbb{P}\left(B_i\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B_i|A\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(B_i \cap A\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B_i\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(A|B_i\right)\mathbb{P}\left(B_i\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}
\end{aligned}$$

Otra forma de expresar este teorema es:

$$\mathbb{P}\left(B_i|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A|B_i\right)\mathbb{P}\left(B_i\right)}{\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}\left(A|B_j\right)\mathbb{P}\left(B_j\right)}$$

Ambas expresiones son equivalentes ya que la fórmula de probabilidad total dice que:

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{N}\mathbb{P}\left(A|B_i\right)\mathbb{P}\left(B_i\right)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que sos docente y que querés saber cuáles son las probabilidades de que un estudiante apruebe si estudia. En el último parcial le tomaste prueba a 30 alumnos de los cuales 20 aprobaron. A esos 20 les preguntaste si estudiaron y 19 te dijeron que si (uno es un cerebrito). También le preguntaste a los que no aprobaron si estudiaron y 7 te confesaron que no estudiaron. Tomemos A como el evento que indica que el estudiante aprobó y E como el evento que indica que el estudiante estudió. Entonces, tenemos que $\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{20}{30}$ y que $\mathbb{P}\left(E|A\right) = \frac{19}{20}$ y $\mathbb{P}\left(E|A'\right) = \frac{3}{10}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A|E\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(E|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(E\right)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(E|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(E|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{P}\left(E|A'\right)\mathbb{P}\left(A'\right)}\\ &= \frac{\frac{19}{20}\cdot\frac{20}{30}}{\frac{19}{20}\cdot\frac{20}{30}+\frac{3}{10}\cdot\left(1-\frac{20}{30}\right)}\\ &= \frac{19}{22}\approx 0.86\end{aligned}$$

O sea que la probabilidad de que un estudiante apruebe si estuda es de aproximadamente 86 %. Es un buen número, se podría decir que el examen fue justo.

2.2. Ejercicio 2

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con función de densidad dada por:

$$f_X\left(x, \theta\right) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{I}_{(0,\theta)}\left(x\right), \; \theta > 0$$

(a) Hallar $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(b) Hallar $\bar{\theta}_n$ el estimador de momentos de θ.

(c) Decidir si $\hat{\theta}_n$ y $\bar{\theta}_n$ son insesgados y calcular su ECM.

(d) ¿Cuál de los dos estimadores prefiere usar con una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$? ¿Y con una de tamaño $n = 8$? Justificar.

2.2.1. (a)

Notemos:

$$f_X\left(x, \theta\right) = \begin{cases}\frac{2x}{\theta^2} & x \in [0, \theta]\\ 0 & x \notin [0, \theta]\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathcal{L} &= \ln\left(\left(\frac{2}{\theta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}X_i\right)\mathbb{I}_{\{X_i \leqslant \theta\,\forall i\}}\left(X\right)\\ &= \ln\left(2^n\prod_{i=1}^{n}X_i\right) - n\ln\left(\theta\right)\mathbb{I}_{\{\text{máx}(\{X_i\})\leqslant\theta\}}\left(X\right)\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{L}$ es una función decreciente en θ. Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es máximo cuando θ es mínimo. Como $\theta \geqslant \text{máx}\left(\{X_i\}\right)$ entonces el mínimo valor que θ puede tomar es $\theta = \text{máx}\left(\{X_i\}\right)$. Es decir, $\hat{\theta}_n = \text{máx}\left(\{X_i\}\right)$.

2.2.2. (b)

Notemos:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,\theta)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{\theta^2}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomamos $\bar{\theta}_n = \frac{3}{2}\bar{X}_n$.

2.2.3. (c)

Veamos si $\hat{\theta}_n$ es insesgado:

$$\begin{aligned} b\left(\hat{\theta}_n\right) &= E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta \\ &= E\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right)\right) - \theta \end{aligned}$$

Para calcular $E\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right)\right)$ necesitamos primero encontrar la distribución de $\text{máx}\left(\{X_i\}\right)$. Notemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right) \leqslant x\right) &= \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{n}\left(X_i \leqslant x\right)\right) \\ X \text{ es i.i.d.} \rightarrow \quad &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i \leqslant x\right) \\ &= \left(\mathbb{P}\left(X \leqslant x\right)\right)^n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{x} f_X(t,\theta)\,\mathrm{d}t\right)^n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{2t}{\theta^2}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(t)\,\mathrm{d}t\right)^n \\ &= \left(\frac{2}{\theta^2}\int_0^{x} t\mathrm{d}t\right)^n \mathbb{I}_{(0,\theta)}(x) \\ &= \left(\frac{x^2}{\theta^2}\right)^n \mathbb{I}_{(0,\theta)}(x) \\ &= \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n} \mathbb{I}_{(0,\theta)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbb{P}\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right) = x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbb{P}\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right) \leqslant x\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x)\right) \\ &= \frac{2n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n-1}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x) \end{aligned}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
E\left(\text{máx}\left(\{X_i\}\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{2n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n-1}\mathbb{I}_{(0,\theta)}\left(x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}}\int_{0}^{\theta} x^{2n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n}{2n+1}\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore b\left(\hat{\theta}_n\right) &= \frac{2n}{2n+1}\theta - \theta \\
&= -\frac{\theta}{2n+1}
\end{aligned}
$$

Como $b\left(\hat{\theta}_n\right) \neq 0$ entonces este estimador no es insesgado. Sin embargo, notemos que $b\left(\hat{\theta}_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, así que al menos es asintóticamente insesgado. Calculemos su ECM:

$$
\text{ECM}\left(\hat{\theta}_n\right) = \sigma^2\left(\hat{\theta}_n\right) + b^2\left(\hat{\theta}_n\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2\left(\hat{\theta}_n\right) &= V\left(\hat{\theta}_n\right) \\
&= E\left(\hat{\theta}_n^2\right) - \left(E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{2n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n-1}\mathbb{I}_{(0,\theta)}\left(x\right)\mathrm{d}x - \left(\frac{2n}{2n+1}\theta\right)^2 \\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}}\int_{0}^{\theta} x^{2n+1}\mathrm{d}x - \frac{4n^2}{4n^2+4n+1}\theta^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\theta^2 - \frac{4n^2}{4n^2+4n+1}\theta^2 \\
&= \frac{n\left(4n^2+4n+1\right) - 4n^2\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)\left(4n^2+4n+1\right)}\theta^2 \\
&= \frac{n}{\left(n+1\right)\left(4n^2+4n+1\right)}\theta^2 \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \text{ECM}\left(\hat{\theta}_n\right) &= \frac{n}{\left(n+1\right)\left(4n^2+4n+1\right)}\theta^2 - \left(-\frac{\theta}{2n+1}\right)^2 \\
&= \frac{n}{\left(n+1\right)\left(4n^2+4n+1\right)}\theta^2 - \frac{1}{4n^2+4n+1}\theta^2 \\
&= \left(\frac{n-\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)\left(4n^2+4n+1\right)}\right)\theta^2 \\
&= -\frac{\theta^2}{\left(n+1\right)\left(4n^2+4n+1\right)} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

Veamos si $\bar{\theta}_n$ es insesgado:

$$\begin{aligned} b\left(\bar{\theta}_n\right) &= E\left(\bar{\theta}_n\right) - \theta \\ &= E\left(\frac{3}{2}\bar{X}_n\right) - \theta \\ &= \frac{3}{2}E\left(\bar{X}_n\right) - \theta \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\theta - \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $b\left(\theta_n\right) = 0$ entonces este estimador es insesgado. Calculemos su ECM:

$$\mathrm{ECM}\left(\bar{\theta}_n\right) = \sigma^2\left(\bar{\theta}_n\right) + b^2\left(\bar{\theta}_n\right)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2\left(\bar{\theta}_n\right) &= V\left(\bar{\theta}_n\right) \\ &= V\left(\frac{3}{2}\bar{X}_n\right) \\ &= \frac{9}{4}V\left(\bar{X}_n\right) \\ &= \frac{9}{4n}V\left(X\right) \\ &= \frac{9}{4n}\left(E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2\right) \\ &= \frac{9}{4n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{2x}{\theta^2}\mathbb{I}_{(0,\theta)}\left(x\right) - \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2\right) \\ &= \frac{9}{4n}\left(\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^3\mathrm{d}x - \frac{4}{9}\theta^2\right) \\ &= \frac{\theta^2}{8n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{ECM}\left(\bar{\theta}_n\right) &= \frac{\theta^2}{8n} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

2.2.4. (d)

Para una muestra grande ($n = 100$) es preferible usar $\hat{\theta}_n$ como estimador ya que va a ser prácticamente insesgado y además porque el ECM tiende a cero más rápidamente para $\hat{\theta}_n$ que para $\bar{\theta}_n$. Sin embargo, si la muestra es chica ($n = 8$) entonces ahí si voy a usar $\bar{\theta}_n$ ya que es insesgado siempre. Sin embargo, el ECM sigue siendo más chico para $\hat{\theta}_n$ que para $\bar{\theta}_n$ si bien el n es chico.

2.3. Ejercicio 3

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ y μ y σ desconocidos. Hallar un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$.

Resolución Como σ es desconocido entonces no puedo usar la distribución normal para hallar el intervalo de confianza. Por lo tanto, voy a usar la distribución t-Student. Tomemos:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}\left(t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant T \leqslant t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}} \leqslant t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}_n - \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

$$\therefore I_\alpha = \left[\bar{X}_n - \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n - \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Además, como la distribución t-Student es simétrica tenemos que $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$. Por lo tanto, el intervalo nos queda:

$$I_\alpha = \left[\bar{X}_n - \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right]$$

3. 14/06/2019

3.1. Ejercicio 1

Se tiene una urna con cuatro pelotas negras y tres rojas. Se remueven tres pelotas al azar sin reposición.

(a) Calcular la probabilidad de que la primera haya sido negra y la tercera roja.

(b) Se se sabe que la tercera pelota fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda haya sido negra?

3.1.1. (a)

Tomemos B_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, como el evento que indica el color de la i-ésima pelota, tomemos $N =$ Negra y $R =$ Roja, y tomemos $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((B_1 = N) \cap (B_3 = R)) &= \mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} N & N & R \end{pmatrix}\right) + \mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} N & R & R \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{3}{2+3} + \frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{2}{3+2} \\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

3.1.2. (b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2 = N | B_3 = R) &= \frac{\mathbb{P}((B_2 = N) \cap (B_3 = R))}{\mathbb{P}(B_3 = R)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} N & N & R \end{pmatrix}\right) + \mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} R & N & R \end{pmatrix}\right)}{\mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} N & N & R \end{pmatrix}\right) + \mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} N & R & R \end{pmatrix}\right) + \mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} R & N & R \end{pmatrix}\right) + \mathbb{P}\left(\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} R & R & R \end{pmatrix}\right)} \\
&= \frac{\frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{3}{2+3} + \frac{3}{4+3} \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{2}{3+2}}{\frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{3}{2+3} + \frac{4}{4+3} \cdot \frac{3}{3+3} \cdot \frac{2}{3+2} + \frac{3}{4+3} \cdot \frac{4}{4+2} \cdot \frac{2}{3+2} + \frac{3}{4+3} \cdot \frac{2}{4+2} \cdot \frac{1}{4+1}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3.2. Ejercicio 2

Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Demostrar que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Resolución Tomemos $Z = X + Y$. Notemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = z) &= \mathbb{P}(X + Y = z) \\
&= \mathbb{P}\left(\cup_{x=0}^{z} \left((X = x) \cap (Y = z - x)\right)\right) \\
&= \sum_{x=0}^{z} \mathbb{P}\left((X = x) \cap (Y = z - x)\right) \\
X \perp Y \rightarrow &= \sum_{x=0}^{z} \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y = z - x) \\
&= \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} \exp(-\mu) \\
&= \exp(-(\lambda + \mu)) \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\
&= \exp(-(\lambda + \mu)) \frac{1}{z!} \underbrace{\sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \lambda^x \mu^{z-x}}_{=(\lambda+\mu)^z} \\
&= \frac{(\lambda + \mu)^z}{z!} \exp(-(\lambda + \mu)) \\
&= \mathcal{P}(\lambda + \mu)
\end{aligned}
$$

3.3. Ejercicio 3

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes donde $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ e $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ para todo $i \in [1, n] \subseteq \mathbb{N}$ entonces calcular el valor límite de:

$$
\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} X_i \mathbb{I}_{\{Y_i > 0\}}(Y_i)
$$

Resolución Tomemos $Z = X \mathbb{I}_{\{Y > 0\}}(Y)$ tal que:

$$
\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} Z_i
$$

Por la ley de grandes números sabemos que $\bar{Z}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} E(Z)$ siempre y cuando $V(Z) < \infty$. Empecemos por calcular la esperanza:

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(X \mathbb{I}_{\{Y > 0\}}(Y)\right) \\
X \perp Y \rightarrow &= E(X)\, E\left(\mathbb{I}_{\{Y > 0\}}(Y)\right) \\
X \sim \mathcal{G}(p) \rightarrow &= \frac{1}{p} E\left(\mathbb{I}_{\{Y > 0\}}(Y)\right)
\end{aligned}
$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
E\left(\mathbb{I}_{\{Y>0\}}(Y)\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{y>0\}}(y)\,\mathcal{N}(0,1)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \mathcal{N}(0,1)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore E(Z) = \frac{1}{2p}$$

Entonces, por ley de grandes números vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i \mathbb{I}_{\{Y_i>0\}}(Y_i) = \frac{1}{2p}$$

Veamos ahora que $V(Z) < \infty$ (ya que si no esto no vale). Notemos:

$$\begin{aligned}
V(Z) &= E\left(Z^2\right) - (E(Z))^2 \\
&= E\left(\left(X\mathbb{I}_{\{Y>0\}}(Y)\right)^2\right) - \frac{1}{4p^2} \\
\left(\mathbb{I}_{\{Y>0\}}(Y)\right)^2 = \mathbb{I}_{\{Y>0\}}(Y) \to &= E\left(X^2\mathbb{I}_{\{Y>0\}}(Y)\right) - \frac{1}{4p^2} \\
X \perp Y \to &= E\left(X^2\right) E\left(\mathbb{I}_{\{Y>0\}}(Y)\right) - \frac{1}{4p^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(V(X) + (E(X))^2\right) - \frac{1}{4p^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{4p^2} \\
&= \frac{2-p}{2p^2} - \frac{1}{4p^2} \\
&= \frac{3-2p}{4p^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

3.4. Ejercicio 4

Sea $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, demuestre que:

$$\frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$$

converge en distribución a una normal e indique con qué parametros.

Resolución Como $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ sabemos que:

$$\begin{cases} E(S_n) = \frac{n}{\lambda} \\ V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2} \end{cases}$$

Notemos:

$$\frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

Esto nos indica que $\frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}$ converge a una normal estándar. Además, sabemos que la FGM de S_n es:

$$M_{S_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$$

Por lo tanto, veamos que $M_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}}(t)$ converge a la FGM de una normal estándar, que es:

$$M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \right)$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
M_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}}(t) &= E\left(\exp\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} t \right) \right) \\
&= \exp\left(-\sqrt{n} t\right) E\left(\exp\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}} S_n \right) \right) \\
&= \exp\left(-\sqrt{n} t\right) M_{S_n}\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \exp\left(-\sqrt{n} t\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda - \frac{\lambda t}{\sqrt{n}}} \right)^n \\
&= \exp\left(-\sqrt{n} t\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\sqrt{n}}} \right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \ln\left(M_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}}(t) \right) &= \ln\left(\exp\left(-\sqrt{n} t\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\sqrt{n}}} \right)^n \right) \\
&= \ln\left(\exp\left(-\sqrt{n} t\right) \right) + \ln\left(\left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\sqrt{n}}} \right)^n \right) \\
&= -\sqrt{n} t + n \ln\left(\left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\sqrt{n}}} \right) \right) \\
&= -\sqrt{n} t - n \ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right)
\end{aligned}$$

Ya que $n \to \infty$ usemos el desarrollo de Taylor de $\ln(1 + x)$ alrededor de $x = 0$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^3\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \ln\left(M_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}}(t) \right) &\approx -\sqrt{n} t - n \left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} \right) \\
&= -\sqrt{n} t + \sqrt{n} t + \frac{t^2}{2} \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore M_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \right)$$

Notemos que esta es la FGM de una normal estándar. Por lo tanto, vimos que $\frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$ converge en distribución a una normal estándar.

3.5. Ejercicio 5

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(1,\theta)$, hallar el estimador de máxima verosimilitud de $q(\theta) = \theta(1-\theta)$. ¿Es consistente?

Resolución Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(1,\theta) &= \frac{1}{\theta-1}\mathbb{I}_{(1,\theta)}(x) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\theta-1} & x \in [1,\theta] \\ 0 & x \notin [1,\theta] \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathcal{L} &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta-1}\right)\mathbb{I}_{\{X_i \leqslant \theta\, \forall i\}}(X) \\
&= -n\ln(\theta-1)\,\mathbb{I}_{\{\text{máx}(\{X_i\}) \leqslant \theta\}}(X)
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}$ es una función decreciente en θ si queremos maximizarlo debemos tomar el menor valor posible de θ. Como $\text{máx}(\{X_i\}) \leqslant \theta$ entonces propongamos $\hat{\theta}_n = \text{máx}(\{X_i\})$. Por lo tanto, nuestro estimador para $q(\theta)$ sería $\hat{q}_n = \text{máx}(\{X_i\})(1-\text{máx}(\{X_i\}))$.

Veamos ahora si $\hat{q}_n$ es consistente. Para eso, queremos ver si $\hat{q}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q$. Notemos que $\hat{q}_n$ es consistente $\iff$ $\hat{\theta}_n$ es consistente. Como $\hat{\theta}_n = \text{máx}(\{X_i\})$ y $\text{máx}(\{X_i\}) \leqslant \theta$ entonces si $n \to \infty$ va a haber un $X_i = \theta$. Por lo tanto, $\hat{\theta}_n = \text{máx}(\{X_i\}) = \theta$. Es decir, $\hat{\theta}_n$ y $\hat{q}_n$ son consistentes.

3.6. Ejercicio 6

Construya un intervalo de nivel $1-\alpha$ para el parámetro p de una $\mathrm{B}(2,p)$ basado en una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Especifique si el intervalo propuesto es asintótico o exacto.

Resolución Como $X \sim \mathrm{B}(2,p)$ sabemos que:

$$\begin{cases} E(X) = 2p \\ V(X) = 2p(1-p) \end{cases}$$

Entonces, tomemos:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - 2p}{\frac{\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{n}}}$$

Como $p \in [0,1]$ entonces $2p(1-p) \leqslant \frac{1}{2}$. Por lo tanto, tomemos:

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{2n}\left(\bar{X}_n - 2p\right) \\
&\sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{2n}\left(\bar{X}_n - 2p\right) \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n}{2} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}} \leqslant p \leqslant \frac{\bar{X}_n}{2} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}\right) \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Además, como $\mathcal{N}(0,1)$ es simétrica y centrada en 0 tenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Por lo tanto, el intervalo nos queda:

$$I = \left[\frac{\bar{X}_n}{2} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}, \frac{\bar{X}_n}{2} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}\right]$$

Este intervalo de confianza es asintótico, ya que asume que n es grande para que valga el Teorema Central de Límite.

3.7. Ejercicio 7

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con media μ desconocida y varianza σ^2 desconocida, considere las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu < \mu_0$.

(a) Proponga un test de nivel α para μ y defina el error de tipo 1 y de tipo 2. Halle una expresión para la función de potencia en función de alguna distribución conocida.

(b) Proponga un ejercicio (solo el enunciado, no lo resuelva) cuya resolución requiera testear las hipótesis anteriores.

3.7.1. (a)

Como σ es desconocido entonces hagamos un test t-Student. Tomemos:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}\left(T < t_{n-1,1-\alpha} | H_0\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < t_{n-1,1-\alpha}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n < \mu_0 + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right) \\
t_{n-1,1-\alpha} = -t_{n-1,\alpha} \rightarrow &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n < \mu_0 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}\right) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la región de rechazo es $\bar{X}_n \in \left(-\infty, \mu_0 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\right)$. En este caso, el error de tipo 1 que representa la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera es α. El error de tipo 2 representa la probabilidad de no rechazar H_0 cuando es falsa. Este error es:

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \notin \left(-\infty, \mu_0 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}\right) | H_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \geqslant \mu_0 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha} | \mu < \mu_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{(\mu_0 - \mu)}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - t_{n-1,\alpha}\right) \\
&= T_{n-1}\left(\frac{(\mu_0 - \mu)}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - t_{n-1,\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Donde $T_{n-1}(x)$ es la distribución acumulada de la t-Student $n-1$. La potencia del test $\pi(\mu)$ es la función que nos da la probabilidad de rechazar H_0 para cada valor de μ. Es decir:

$$\begin{aligned}
\pi(\mu) &= \begin{cases} \alpha & \mu = \mu_0 \\ 1 - \beta & \mu < \mu_0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha & \mu = \mu_0 \\ 1 - T_{n-1}\left(\frac{(\mu_0 - \mu)}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - t_{n-1,\alpha}\right) & \mu < \mu_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

3.7.2. (b)

Se tienen 100 muestras $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$ de la temperatura del núcleo de un reactor nuclear de la planta donde trabajamos. Como forma de control y para evitar desastres queremos ver si la temperatura media del núcleo es menor que la temperatura crítica $T_C = 1300°\text{C}$. Si la temperatura del núcleo es la crítica (o mayor) entonces se debe iniciar el protocolo de enfriamiento con agua. Proponer un test de nivel $\alpha = 0.005$ para la temperatura media del núcleo. Suponiendo que $\bar{T}_n = 1295°\text{C}$ y $S_n^2 = 200°\text{C}$ decidir si debemos iniciar el protocolo de enfriamiento o no.

4. 22/02/2019

4.1. Ejercicio 1

Una enfermedad afecta a una de cada 500 personas de cierta población. Se usa un examen radiológico para detectar posibles enfermos. Se sabe que la probabilidad de que el examen aplicado a un enfermo lo muestre como tal es 0.90 y que la probabilidad de que el examen aplicado a una persona sana la muestre como enferma es 0.01. Calcular la probabilidad de que una persona esté realmente enferma si su examen dio positivo (es decir, si lo diagnostica como enferma).

Resolución Tomemos E como el evento que denota que la persona está enferma y P como el evento que denota que el examen dio positivo. Los datos del problema son:

$$\mathbb{P}(E) = \tfrac{1}{500} = 0.002 \quad \mathbb{P}(P|E) = 0.9 \quad \mathbb{P}\left(P|E^{'}\right) = 0.01$$

El ejercicio nos pide que calculemos $\mathbb{P}(E|P)$, así que usemos el Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P|E)\,\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P|E')\,\mathbb{P}(E')} \\
\mathbb{P}\left(E^{'}\right) = 1 - \mathbb{P}(E) \rightarrow &= \frac{\mathbb{P}(P|E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P|E)\,\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P|E')\,(1 - \mathbb{P}(E))} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.002}{0.9 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot (1 - 0.002)} \\
&\approx 0.15
\end{aligned}$$

4.2. Ejercicio 2

Sea $(N)_{t \geqslant 0}$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 3.2$, calcule $\mathbb{P}(N_3 - N_1 = 0)$ y $\mathbb{P}((N_2 = 7) \cap (N_5 = 11))$. Justifique sus cálculos.

Resolución Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_3 - N_1 = 0) &= \mathbb{P}(N_3 = N_1) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}((N_1 = x) \cap (N_3 = x)) \\
N_1 \perp N_3 \rightarrow &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1 = x)\,\mathbb{P}(N_3 = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)\right)^2 \\
&= \exp(-2\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2x}}{(x!)^2}
\end{aligned}$$

Ni idea como calcular eso. Por lo que averigue online $N_3 - N_1$ debería seguir una distribución llamada la Distribución de Skellam. Por ahí está mal el enunciado y debería decir $\mathbb{P}(N_3 + N_1 = 0)$. Esto lo veo más factible al menos.

Podemos usar la propiedad que dice que si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y $X_1 \perp X_2$ entonces $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 0) &= \mathbb{P}(X = 0 | X \sim \mathcal{P}(2\lambda)) \\
&= \frac{(2\lambda)^0}{0!} \exp(-2\lambda) \\
&= \exp(-2\lambda) \\
\lambda = 3.2 \rightarrow &\approx 1.66 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Ahora, calculemos la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((N_2 = 7) \cap (N_5 = 11)) &= \mathbb{P}(N_2 = 7)\,\mathbb{P}(N_5 = 11) \\
&= \left(\frac{\lambda^7}{7!} \exp(-\lambda)\right)\left(\frac{\lambda^{11}}{11!} \exp(-\lambda)\right) \\
\lambda = 3.2 \rightarrow &\approx 1.02 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

4.3. Ejercicio 3

Sean X e Y variables aleatorias que satisfacen:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x \in \{1,2,3,4\} \wedge y \leqslant x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(a) Calcular el coeficiente de correlación entre X e Y y decidir si las variables son o no independientes.

(b) Calcular $\mathbb{P}(X = 4 | Y = 3)$ y $\mathbb{P}(X = 0 | Y = 3)$.

4.3.1. (a)

El coeficiente de correlación es:

$$\begin{aligned}
\rho(X, Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \\
&= \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}
\end{aligned}$$

Entonces, empecemos por las esperanzas:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{y=y}^{\infty} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} x \sum_{y=0}^{x} 1 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} x^2 \\
&= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{10} \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} y\mathbb{P}(Y=y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} y \sum_{x=x}^{\infty} \mathbb{P}(X=x, Y=y) \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} \sum_{y=0}^{x} y \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} \frac{(x+1)x}{2} \\
&= \frac{1}{20} \sum_{x=1}^{4} \left(x^2 + x\right) \\
&= \frac{1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + 4^2 + 4}{20} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Ahora veamos las varianzas:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \mathbb{P}(X=x) - 3^2 \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x, Y=y) - 9 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} x^2 \sum_{y=0}^{x} 1 - 9 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} x^3 - 9 \\
&= \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{10} - 9 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= E\left(Y^2\right) - \left(E(Y)\right)^2 \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} y^2 \mathbb{P}(Y=y) - 2^2 \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} y^2 \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x, Y=y) - 4 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{y=1}^{4} \sum_{x=y}^{4} y^2 - 4 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{y=1}^{4} y^2 (5-y) - 4 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{y=1}^{4} \left(5y^2 - y^3\right) - 4 \\
&= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{2} - \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{10} - 4 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ahora veamos la covarianza:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} xy \mathbb{P}(X=x, Y=y) - 3 \cdot 2 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} x \sum_{y=0}^{x} y - 6 \\
&= \frac{1}{10} \sum_{x=1}^{4} x \frac{(x+1)x}{2} - 6 \\
&= \frac{1}{20} \sum_{x=1}^{4} \left(x^3 + x^2\right) - 6 \\
&= \frac{1^3+1^2+2^3+2^2+3^3+3^2+4^3+4^2}{20} - 6 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el coeficiente de correlación es:

$$
\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 \cdot 1}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Como $\rho(X,Y) \neq 0$ entonces sabemos que las variables X e Y no son independientes.

4.3.2. (b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=4|Y=3) &= \frac{\mathbb{P}(X=4,Y=3)}{\mathbb{P}(Y=3)} \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=x,Y=3)} \\ &= \frac{1}{\sum_{x=3}^{4}1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0|Y=3) &= \frac{\mathbb{P}(X=0,Y=3)}{\mathbb{P}(Y=3)} \\ Y>X\rightarrow &= 0\end{aligned}$$

4.4. Ejercicio 4

Sea $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \sim \mathrm{B}(n,p)$, demuestre que:

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{n(1-p)p}}$$

converge en distribución a una variable normal y especifique con qué parametros.

Resolución Como X_n son variables binomiales sabemos que:

$$\begin{cases}E(X) = np \\ V(X) = np(1-p)\end{cases}$$

Notemos entonces que:

$$\begin{aligned}\frac{X_n - np}{\sqrt{n(1-p)p}} &= \frac{X_n - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \\ &= Z_n\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema Central del Límite sabemos que Z_n converge en distribución a una variable normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$).

4.5. Ejercicio 5

Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ para una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[\theta, 1]$. Demuestre que es un estimador consistente.

Resolución Sabemos que $X \sim \mathcal{U}(\theta, 1)$. Notemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\theta,1) &= \frac{1}{1-\theta}\mathbb{I}_{(\theta,1)}(x) \\ &= \begin{cases}\frac{1}{1-\theta} & x\in[\theta,1] \\ 0 & x\notin[\theta,1]\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathcal{L} &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}\right)\mathbb{I}_{\{X_i\geqslant\theta\,\forall i\}}(X)\\ &= -n\ln(1-\theta)\,\mathbb{I}_{\{\text{mín}(\{X_i\})\geqslant\theta\}}(X)\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{L}$ es una función creciente en θ. Por lo tanto, si queremos maximizar $\mathcal{L}$ debemos tomar el máximo valor posible de θ. Como $\theta \leqslant \text{mín}(\{X_i\})$ entonces el estimador de máxima verosimilitud es $\hat{\theta}_n = \text{mín}(\{X_i\})$. Veamos que este estimador es consistente:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_n &= \lim_{n\to\infty}\text{mín}(\{X_i\})\\ X\sim\mathcal{U}(\theta,1)\to\quad &= \text{mín}([\theta,1])\\ &= \theta\end{aligned}$$

4.6. Ejercicio 6

Construya un intervalo asintótico de confianza $1-\alpha$ para el parámetro p de una distribución Bernoulli.

Resolución Si $X\sim \text{Be}(p)$ entonces:

$$\begin{cases}E(X) = p\\ V(X) = p(1-p)\end{cases}$$

Por lo tanto, tomemos un modelo de n muestras de X y definamos:

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Notemos que como $p\in[0,1]$ entonces $\sqrt{p(1-p)}\leqslant\frac{1}{2}$. Entonces, tomemos:

$$T_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - p\right)$$

Por el Teorema Central del Límite sabemos que $T\sim\mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbb{P}\left(t_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant T_n\leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(t_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-p\right)\leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant \bar{X}_n - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right)\\ t_{1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{\frac{\alpha}{2}}\to\quad &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant \bar{X}_n + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right)\\ &= 1-\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore I &= \left[\bar{X}_n - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]\\ &= \bar{X}_n \pm \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\end{aligned}$$

4.7. Ejercicio 7

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución normal con media μ y varianza $\sigma^2 = 1$, proponga una región de rechazo de nivel $\alpha = 0.05$ para testear:

$$\begin{cases}H_0: & \mu = 5\\ H_1: & \mu > 5\end{cases}$$

Se tomó una muestra de tamaño $n = 12$, obteniéndose un p-valor de 0.048. Indique para cuáles de los siguientes niveles se puede rechazar H_0 con los datos obtenidos:

$$\alpha = 0.1,\ \alpha = 0.05,\ \alpha = 0.01,\ \alpha = 0.005$$

Resolución Tomemos:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \\ \sigma = 1 \rightarrow &= \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right) \\ n \gg 1 \rightarrow &\sim \mathcal{N}\left(0, 1\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z > t_{1-\alpha} | H_0\right) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right) > t_{1-\alpha} | H_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n > \mu + \frac{t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} | H_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n > 5 + \frac{t_{1-0.05}}{\sqrt{n}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(\bar{X}_n > 5 + \frac{1.64}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

Es decir, la región de rechazo para $\bar{X}_n$ es $\left(5 + \frac{1.64}{\sqrt{n}}, \infty\right)$.

Ahora, como nos dicen que $p = 0.048$ entonces debemos fijarnos si $\alpha > p$ para rechazar y no rechazar cuando $\alpha \leqslant p$. Entonces:

$$\begin{cases} \alpha = 0.1 > p: & \text{Rechazo } H_0 \\ \alpha = 0.05 > p: & \text{Rechazo } H_0 \\ \alpha = 0.01 < p: & \text{No Rechazo } H_0 \\ \alpha = 0.005 < p: & \text{No Rechazo } H_0 \end{cases}$$

Otra forma (más rebuscada) de ver si rechazamos o no es usar que $n = 12$ y el p-valor para calcular $\bar{X}_n$ y fijarnos para cada α si $\bar{X}_n$ cae o no en la región de rechazo que hallamos antes (cambiando $t_{1-0.05}$ por el $t_{1-\alpha}$ correspondiente a cada α).

4.8. Ejercicio 8

(a) Enuncie y demuestre la regla de multiplicación de las probabilidades condicionales. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

(b) Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar la relga de la multiplicación. No incluya la resolución del ejercicio.

4.8.1. (a)

La regla de multiplicación de las probabilidades condicionales establece que:

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A | B\right) \mathbb{P}\left(B\right)$$